

УДК 539.3

## ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С НАЧАЛЬНЫМИ ГЛОБАЛЬНЫМИ НЕСОВЕРШЕНСТВАМИ

**О.А. Сергеев, В.Г. Киселев**

*Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского*

Рассматривается устойчивость геометрически нелинейных стержневых конструкций с начальными глобальными несовершенствами, которые могут сильно влиять на значение критической силы потери устойчивости. Формулируются критерии для классификации четырех типов критических точек – асимметричная особая точка бифуркации, симметричная особая точка бифуркации первого или второго типа, предельная точка. Учет начальных несовершенств в конструкции приводит к вырождению асимметричной и симметричной особых точек бифуркации в предельные точки. Предложен аналитический анализ чувствительности четырех типов некротной критической нагрузки и перемещений конструкции с начальными глобальными несовершенствами. Для анализа чувствительности применяется прямой метод. Искомые производные необходимы в задачах оптимизации с ограничениями на критическую нагрузку потери устойчивости конструкции, где используются аппроксимации активных ограничений. Метод оптимизации основан на квадратичной аппроксимации целевой функции и специально сконструированных аппроксимациях для четырех типов критической нагрузки потери устойчивости конструкции с начальными несовершенствами.

*Ключевые слова:* оптимизация, аналитический анализ чувствительности, геометрически нелинейные стержневые конструкции, начальные глобальные несовершенства, критическая сила, общая потеря устойчивости, некротные предельные точки, некротные особые точки бифуркации.

### **1. Введение**

Рассматриваются гибкие стержневые конструкции с начальными несовершенствами, у которых возникают большие перемещения и углы поворота, а их деформации остаются малыми, так что выполняется линейный закон Гука для материала конструкций. Уравнения равновесия здесь записываются для деформированных состояний конструкций.

В задачах устойчивости равновесия геометрически нелинейных конструкций компоненты тензора деформаций выражаются через компоненты вектора перемещений с помощью линейных и квадратичных членов от перемещений [1–4].

При нагружении касательная матрица жесткости конструкции становится особенной, что трактуется как общая потеря устойчивости. В работе приводятся критерии для классификации особых состояний – некротные симметричная особая точка бифуркации первого или второго типа, асимметричная особая точка бифуркации,

предельная точка. Учет начальных несовершенств в конструкции приводит к вырождению особых асимметричной и симметричной точек бифуркации в предельные точки. Важными оказываются две задачи: мгновенное поведение конструкции после критической точки и изменение критической нагрузки потери устойчивости в зависимости от заданных начальных несовершенств. Рассматриваются случаи, когда при задании начальных несовершенств у конструкции значение критической нагрузки, тип критической точки изменяются или значение критической нагрузки изменяется, а тип критической точки не меняется.

Существуют местные несовершенства и глобальные несовершенства у конструкции. Местные несовершенства – это, например, начальные искривления элементов [5]. Глобальные несовершенства – отклонения геометрии настоящей конструкции от геометрии идеальной конструкции.

Известно немного работ, в которых оптимизация конструкций проводилась с учетом местных или глобальных несовершенств. Влияние местных несовершенств на оптимальные проекты ферм было рассмотрено в работе [5]. Нам неизвестны в литературе работы по оптимизации формы и анализу чувствительности геометрически нелинейных стержневых конструкций с учетом начальных глобальных несовершенств.

В статье изложен метод оптимизации для геометрически нелинейных ферменных и рамных конструкций, содержащих глобальные начальные несовершенства. Проектирование ведется при ограничениях на критическую нагрузку общей потери устойчивости и ограничениях на варьируемые параметры. Для ограничений на четыре типа критической нагрузки потери устойчивости конструкции с начальными несовершенствами используются специально сконструированные аппроксимации [6].

## 2. Постановка задачи оптимизации

Требуется определить такие значения управляемых параметров  $\mathbf{X}^*$  из области допустимых значений, для которых масса конструкции минимальна:

$$W(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X} \in F} W(\mathbf{X}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{X}$  – вектор управляемых параметров. Область допустимых значений  $F$  определяется следующими ограничениями:

– на критическую нагрузку общей потери устойчивости конструкции с начальными несовершенствами

$$\Lambda^{\text{imp}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{P}_0 \geq \Lambda^d \mathbf{P}_0, \quad (2)$$

где  $\Lambda^{\text{imp}}$  – некрatный критический множитель внешней консервативной нагрузки  $\mathbf{P}_0$ ;  $\Lambda^d$  – рабочий уровень нагрузки  $\mathbf{P}_0$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – заданный вектор начальных глобальных несовершенств;

– на предельные значения управляемых параметров

$$\mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\max}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{X}_{\min}$  и  $\mathbf{X}_{\max}$  – нижние и верхние значения для параметров проектирования.

Вектор начальных несовершенств  $\boldsymbol{\varepsilon}$  подобен вектору варьируемых параметров  $\mathbf{X}$ . Параметры начальных несовершенств  $\boldsymbol{\varepsilon}$  входят в полную потенциальную энергию, уравнения равновесия конструкции и т.д. Однако в задаче оптимизации начальные несовершенства задаются, а варьируемые параметры  $\mathbf{X}$  требуется найти. Заме-

тим, что варьируемые параметры  $\mathbf{X}$  могут изменяться в больших пределах и, как следствие, требуются последовательные аппроксимации активных ограничений по  $\mathbf{X}$ . Параметры несовершенств  $\boldsymbol{\varepsilon}$  имеют малые величины, поэтому требуется всего одна аппроксимация для активных ограничений и потом можно использовать эти аппроксимации для заданных  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

### 3. Основные уравнения

Рассмотрим нелинейную упругую конструкцию, для которой полная потенциальная энергия  $\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, \boldsymbol{\varepsilon})$  зависит от вектора перемещений  $\mathbf{u}$ , пропорционального множителя нагрузки  $\Lambda$ , заданного параметра несовершенства  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Для упрощения уравнений используем один параметр несовершенства  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и считаем, что все компоненты внешней нагрузки пропорциональны одному изменяющемуся параметру  $\Lambda$ . Полная потенциальная энергия конструкции с начальным несовершенством записывается как

$$\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, \boldsymbol{\varepsilon}) = \varphi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \Lambda \mathbf{u}^T \mathbf{P}_0, \quad (4)$$

где  $\varphi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon})$  – энергия деформации,  $\mathbf{P}_0$  – вектор внешних консервативных нагрузок. Уравнения равновесия конструкции для критического состояния имеют вид:

$$\mathbf{r}^c(\mathbf{u}^{\text{imp}}, \Lambda^{\text{imp}}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\partial \Pi^c}{\partial u_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Дифференцируя уравнение равновесия (5) по параметру продвижения  $t$  вдоль кривой критических состояний, можно записать

$$\mathbf{K}^c \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\Lambda}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad (6)$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по  $t$ ,  $\mathbf{K}^c = \partial \mathbf{r}^c / \partial \mathbf{u}$  – особенная касательная матрица жесткости.

Дифференцируя (6) по  $t$  еще два раза, получаем два следующих уравнения:

$$\dot{\mathbf{K}}^c \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \mathbf{K}^c \ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \dot{\mathbf{r}}_{\Lambda}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\Lambda}^c \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + \dot{\mathbf{r}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}^c &= \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{\Lambda}^c = \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\Lambda\boldsymbol{\varepsilon}}^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \dot{\mathbf{r}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c &= \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\Lambda\boldsymbol{\varepsilon}}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}}^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}; \\ \mathbf{K}^c \ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + 2\dot{\mathbf{K}}^c \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \ddot{\mathbf{K}}^c \mathbf{u}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\Lambda}^c \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + 2\dot{\mathbf{r}}_{\Lambda}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \\ &+ \ddot{\mathbf{r}}_{\Lambda}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + 2\dot{\mathbf{r}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \ddot{\mathbf{r}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{r}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^c \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{K}}^c &= \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}^2} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u} \partial \Lambda} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda^2} (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_{\Lambda}^c &= \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda \partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda^2} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda\Lambda}^c (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 + 2\mathbf{r}_{\Lambda\Lambda\epsilon}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \dot{\epsilon} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\Lambda\epsilon\epsilon}^c (\dot{\epsilon})^2 + \mathbf{r}_{\Lambda\epsilon}^c \ddot{\epsilon}, \\
\ddot{\mathbf{r}}_{\epsilon}^c &= \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \epsilon \partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \epsilon \partial \Lambda} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \epsilon^2} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\epsilon} + \\
& + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \epsilon} \ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\epsilon\Lambda\Lambda}^c (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 + 2\mathbf{r}_{\epsilon\epsilon\Lambda}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \dot{\epsilon} + \mathbf{r}_{\epsilon\Lambda}^c \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\epsilon\epsilon\epsilon}^c (\dot{\epsilon})^2 + \mathbf{r}_{\epsilon\epsilon}^c \ddot{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Уравнения (6)–(8) будут использоваться для классификации критических точек и аналитического анализа чувствительности критического множителя нагрузки и перемещений.

#### 4. Классификация некротных особых точек бифуркации и предельной точки

Умножим слева уравнение (6) на  $\Phi_1^T$ , где  $\Phi_1$  – первая форма потери устойчивости конструкции. Тогда можно записать:

$$\Phi_1^T (\mathbf{K}^c \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\Lambda}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\epsilon}^c \dot{\epsilon}) = 0. \quad (9)$$

Из (9) приходим к условию потери устойчивости конструкции:

$$\Lambda^{\text{imp}} \Phi_1^T \mathbf{r}_{\Lambda}^c + \dot{\epsilon} \Phi_1^T \mathbf{r}_{\epsilon}^c = 0, \quad (10)$$

которое будем использовать для классификации некротных особых точек бифуркации и предельной точки.

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_{\Lambda}^c = 0, \quad \Phi_1^T \mathbf{r}_{\epsilon}^c \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \neq 0, \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad (11)$$

называется асимметричной особой точкой бифуркации, то есть некротная асимметричная особая точка бифуркации исчезает при задании параметра несовершенства  $\epsilon$ , а предельные точки развиваются вдоль кривой критических состояний  $I$ , рис. 1,а. Для положительных значений  $\epsilon$  функция  $\Lambda^{\text{imp}}(\epsilon)$  представляет собой параболу, рис. 1,б. При  $\epsilon = 0$  имеем  $d\Lambda^{\text{imp}}/d\epsilon = \infty$ . Заметим, что не существует кривой  $\Lambda^{\text{imp}}(\epsilon)$  для  $\epsilon < 0$ . Пунктирные кривые на рис. 1,а обозначают неустойчивые положения равновесия, а сплошные кривые – устойчивые.

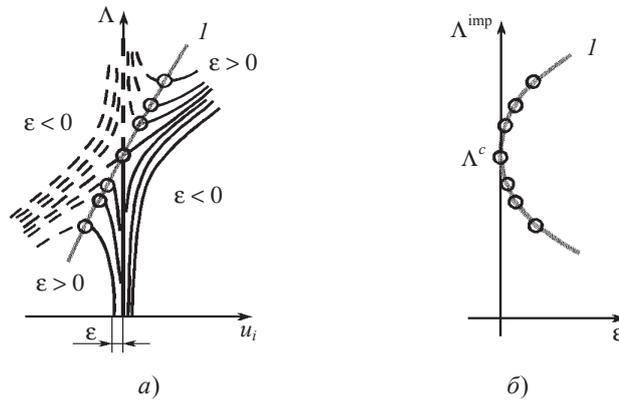


Рис. 1

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_{\Lambda}^c = 0, \quad \Phi_1^T \mathbf{r}_{\epsilon}^c \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^{\text{imp}} = 0, \quad \dot{\epsilon} = 0, \quad (12)$$

называется симметричной особой точкой бифуркации, т.е. некратная симметричная особая точка бифуркации первого или второго типа исчезает при задании параметра несовершенства  $\varepsilon$ , а предельные точки развиваются вдоль кривой критических состояний  $I$ , рис. 2, а, в. Закон изменения  $\Lambda^{\text{imp}}$  от  $\varepsilon$  для особой симметричной точки бифуркации первого или второго типа (рис. 2, б, г), особой асимметричной точки бифуркации (рис. 1, б) впервые был открыт Коитером [7]. При  $\varepsilon = 0$  имеем точку острого перегиба у функции  $\Lambda^{\text{imp}}(\varepsilon)$ . Критический множитель нагрузки  $\Lambda^{\text{imp}}$ , соответствующий предельной точке, оказывается меньше критического множителя нагрузки  $\Lambda^c$ , соответствующего особой симметричной точке бифуркации второго типа у конструкции без начальных несовершенств, рис. 2, в.

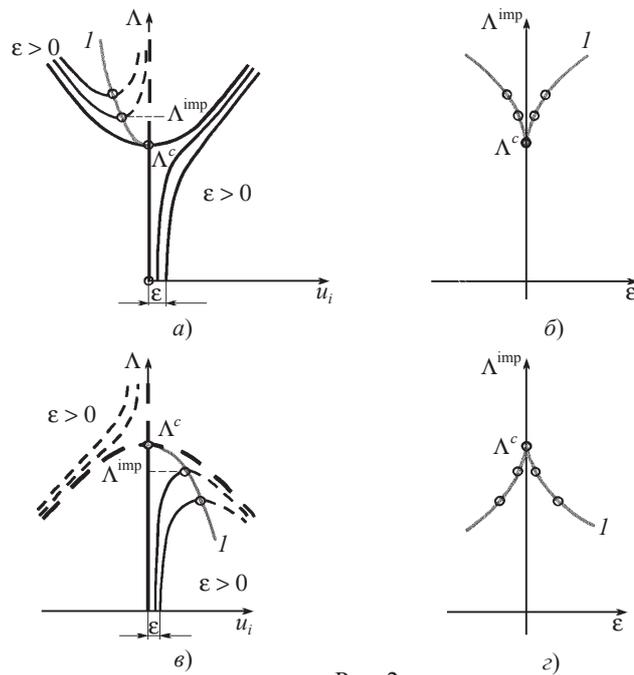


Рис. 2

Точка, для которой выполняется

$$\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0 \quad \Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c = 0, \quad \dot{\Lambda}^{\text{imp}} = 0, \quad \dot{\varepsilon} \neq 0, \quad (13)$$

называется предельной точкой. Влияние начальных несовершенств на предельную точку показано на рис. 3, а. Функция  $\Lambda^{\text{imp}}(\varepsilon)$  изменяется квазилинейно и не обладает особым поведением, когда параметр несовершенства  $\varepsilon$  стремится к нулю, рис. 3, б.

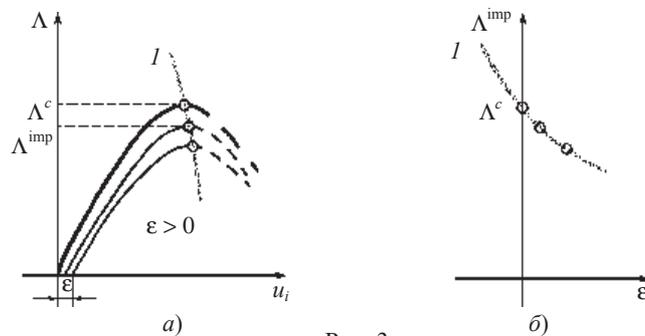


Рис. 3

## 5. Аналитический анализ чувствительности критического множителя нагрузки и перемещений для некротной асимметричной и симметричной особых точек бифуркации

Для того чтобы уменьшить число расчетов конструкции, направленных на получение оптимального проекта, необходимо сформировать с помощью разложения в ряд Тейлора явные приближенные выражения для активных ограничений, оставшихся на  $k$ -й итерации оптимизации проекта.

**5.1. Асимметричная особая точка бифуркации.** Для асимметричной точки бифуркации имеем

$$\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1 \Phi_1 \neq 0, \quad \dot{\Lambda}^{\text{imp}}(t_0) \neq 0, \quad \dot{\varepsilon}(t_0) = 0, \quad \ddot{\varepsilon}(t_0) \neq 0.$$

Разложения в ряд Тейлора для  $\Lambda^{\text{imp}}$  и  $\varepsilon$  записываются следующим образом:

$$\Lambda^{\text{imp}}(t) = \Lambda^{\text{imp}}(t_0) + \dot{\Lambda}^{\text{imp}}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\Lambda}^{\text{imp}}(t_0)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{\Lambda}^{\text{imp}}(t_0)\Delta t^3 + \dots \quad (14)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\varepsilon}(t_0)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\dddot{\varepsilon}(t_0)\Delta t^3 + \dots, \quad (15)$$

где  $t_0$  соответствует отсутствию несовершенств у конструкции.

Рассматривая только два первых слагаемых в разложениях (14) и (15), получаем

$$\Lambda^{\text{imp}}(t) = \Lambda^{\text{imp}}(t_0) \pm \dot{\Lambda}^{\text{imp}}(t_0) \left( \frac{2(\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0))}{\ddot{\varepsilon}(t_0)} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Аналогично можно записать

$$\mathbf{u}^{\text{imp}}(t) = \mathbf{u}^{\text{imp}}(t_0) \pm \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}(t_0) \left( \frac{2(\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0))}{\ddot{\varepsilon}(t_0)} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

## 5.2. Симметричная особая точка бифуркации первого или второго типа.

Для симметричной точки бифуркации имеем

$$\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1 \Phi_1 = 0, \quad \dot{\Lambda}^{\text{imp}}(t_0) = 0, \quad \dot{\varepsilon}(t_0) = 0, \quad \ddot{\varepsilon}(t_0) = 0.$$

Следовательно, вторые слагаемые в (14) и (15) пропадают. Рассматривая последующие члены в разложениях (14) и (15), получаем

$$\Lambda^{\text{imp}}(t) = \Lambda^{\text{imp}}(t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\Lambda}^{\text{imp}}(t_0) \left( \frac{6(\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0))}{\ddot{\varepsilon}(t_0)} \right)^{2/3}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\text{imp}}(t_0) = \mathbf{u}^{\text{imp}}(t_0) + \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}(t_0) \left( \frac{6(\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0))}{\ddot{\varepsilon}(t_0)} \right)^{1/3} + \\ + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}(t_0) \left( \frac{6(\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0))}{\ddot{\varepsilon}(t_0)} \right)^{2/3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим задачу определения производных  $\dot{\Lambda}^{\text{imp}}$ ,  $\ddot{\Lambda}^{\text{imp}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}$ ,  $\ddot{\varepsilon}$ ,  $\dddot{\varepsilon}$  по параметру продвижения  $t$  вдоль кривой критических состояний  $l$ .

Параметрические уравнения кривой критических состояний имеют вид:

$$\mathbf{u}^{\text{imp}} = \mathbf{u}^{\text{imp}}(t), \quad \Lambda^{\text{imp}} = \Lambda^{\text{imp}}(t), \quad \varepsilon = \varepsilon(t), \quad (20)$$

где  $t$  – параметр продвижения вдоль кривой критических состояний  $l$ . Когда выполняются условия (11) или (12), тогда  $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt = 0$  и параметр продвижения  $t$  вдоль кривой критических состояний не может быть равным параметру  $\varepsilon$ . Для выбора параметра  $t$  можно рассмотреть два случая: 1)  $t = u_i$ ; 2)  $t = s$ , где  $u_i$ ,  $s$  – компонента вектора перемещений и длина кривой критических состояний соответственно.

Дифференцируя уравнение  $\mathbf{K}^c \Phi_1 = 0$  по параметру продвижения вдоль кривой критических состояний, получим

$$\left( \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} \right) \Phi_1 + \mathbf{K}^c \Phi_1 = 0. \quad (21)$$

Подставляя  $\dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} = (\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda) \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + A \Phi_1$  [8] в уравнение (21) и умножая его слева на  $\Phi_1^T$ , получим производную  $\dot{\Lambda}^{\text{imp}}$  для кривой критических состояний

$$\dot{\Lambda}^{\text{imp}} = -A \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1 \Phi_1 / \left[ \Phi_1^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \right) \Phi_1 \right]. \quad (22)$$

Неизвестный коэффициент  $A$  определим следующим образом. Пусть параметр  $t$  является длиной кривой критических состояний  $s$ . Тогда можно записать

$$(\dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}})^T \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} = 1. \quad (23)$$

Раскрывая (23), приходим к уравнению

$$A^2 + 2A \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \right)^T \Phi_1 + \left[ (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 \left( \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} - 1 \right] = 0. \quad (24)$$

Следовательно, в критической точке можно получить два решения для  $A$ .

Определим производную  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$ . Для этого рассмотрим процесс деформации под нагрузкой, т.е. можно записать следующее уравнение [9–12]:

$$\mathbf{K}^c \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \mathbf{r}_\Lambda^c = 0. \quad (25)$$

Матрица  $\mathbf{K}^c$  является особенной в критическом состоянии, и нахождение  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$  из линейной системы (25) становится невозможным. Так как критическая точка некратная, то требуется одно дополнительное уравнение, которое получим дифференцированием уравнения (25) по  $\Lambda$ , и после умножения его слева на  $\Phi_1^T$  необходимое уравнение будет иметь вид:

$$\Phi_1^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + 2 \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c \right) = 0. \quad (26)$$

Заметим, что уравнение (26) является квадратичным относительно  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$ . Следовательно, в критической точке можно получить два решения для производной  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$ .

Для особой симметричной точки бифуркации первого или второго типа  $\dot{\Lambda}^{\text{imp}} = 0$  и, следовательно, любое из двух значений величины  $A$  может использоваться,

т.к. собственный вектор  $\Phi_1$  определяется с точностью до множителя. Исследования по выбору значений величин  $A$  и  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$  для особой асимметричной точки бифуркации выходят за рамки этой статьи.

Определим производную  $\dot{\epsilon}$ . Умножая слева уравнение (7) на  $\Phi_1^T$ , получим

$$\dot{\epsilon} = - \left( \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + 2 \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \Phi_1^T \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 \right) / (\Phi_1^T \mathbf{r}_\epsilon^c). \quad (27)$$

Вторая производная по параметру продвижения вдоль кривой критических состояний от вектора  $\mathbf{u}^{\text{imp}}$  может быть записана так:

$$\ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} = \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda^2} (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 + \mathbf{V}. \quad (28)$$

Теперь определим производную  $\partial^2 \mathbf{u}^c / \partial \Lambda^2$ . После дифференцирования уравнения (25) по  $\Lambda$  получим

$$\mathbf{K}^c \frac{\partial^2 \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda^2} + 2 \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c = 0. \quad (29)$$

Требуется одно дополнительное уравнение. Получим его после дифференцирования уравнения (29) по  $\Lambda$  и последующего умножения слева на  $\Phi_1^T$ . Дополнительное уравнение имеет вид:

$$\Phi_1^T \left[ 3 \left( \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda^2} + \left( \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}^2} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + 3 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u} \partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + 3 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda^2} \right) \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda\Lambda}^c \right] = 0. \quad (30)$$

Рассмотрим задачу определения вектора  $\mathbf{V}$  и производной  $\ddot{\Lambda}^{\text{imp}}$ . Принимая во внимание уравнения (25), (29) и  $\dot{\epsilon} = 0$ , получим из (7) следующее уравнение:

$$\mathbf{K}^c \mathbf{V} + 2 \dot{\Lambda}^{\text{imp}} A \left( \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \right) \Phi_1 + A^2 \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1 \Phi_1 + \mathbf{r}_\epsilon^c \dot{\epsilon} = 0. \quad (31)$$

Матрица  $\mathbf{K}^c$  является особенной, и поэтому требуется дополнительное уравнение. Дифференцируя (23) по параметру продвижения вдоль кривой критических состояний, получаем необходимое уравнение

$$(\dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}})^T \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} = 0. \quad (32)$$

После подстановки в (32)  $\dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}$  и  $\ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}$  получим

$$\left( \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \right)^T + A \Phi_1^T \right) \left( \mathbf{V} + \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda^2} \right) = 0. \quad (33)$$

Таким образом, имеем  $(n-1)$  уравнений в системе уравнений (31) и одно уравнение (33). Для определения вектора  $\mathbf{V}$  и производной  $\ddot{\Lambda}^{\text{imp}}$  их недостаточно. Еще одно необходимое дополнительное уравнение получим после дифференцирования (21) по параметру продвижения вдоль кривой критических состояний  $t$  и последующего умножения полученного уравнения слева на  $\Phi_1^T$ :

$$\Phi_1^T \ddot{\mathbf{K}}^c \Phi_1 + 2\Phi_1^T \dot{\mathbf{K}}^c \dot{\Phi}_1 = 0, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{K}}^c &= \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}^2} \left( (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + A \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \left( \Phi_1 \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \Phi_1 \right) + A^2 \Phi_1 \Phi_1 \right) + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u} \partial \Lambda} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + A \Phi_1 \right) \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda^2} (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 + \mathbf{V} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda^2} (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon} \ddot{\varepsilon}, \\ \dot{\mathbf{K}}^c &= \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \left( \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + A \Phi_1 \right) + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda}^{\text{imp}}. \end{aligned}$$

Производная  $\dot{\Phi}_1$  определяется из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{K}}^c \Phi_1 + \mathbf{K}^c \dot{\Phi}_1 = 0, \\ \Phi_1^T \dot{\Phi}_1 = 0. \end{cases} \quad (35)$$

Заметим, что последнее уравнение в системе (35) получено после дифференцирования условия нормировки

$$\Phi_1^T \Phi_1 = 1. \quad (36)$$

Теперь имеем  $(n+1)$  уравнений для нахождения вектора  $\mathbf{V}$  и производной  $\ddot{\Lambda}^{\text{imp}}$ . Вторая производная  $\ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}$  по параметру продвижения вдоль кривой критических состояний определяется из уравнения (28).

Умножая уравнение (8) слева на  $\Phi_1^T$  получаем третью производную  $\ddot{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} &= - \frac{\Phi_1^T}{\Phi_1^T \mathbf{r}_\varepsilon^c} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}^2} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + 3 \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \ddot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + 3 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u} \partial \Lambda} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + \right. \\ &+ 3 \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \dot{\Lambda}^{\text{imp}} + 3 \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + 3 \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} \ddot{\varepsilon} + 3 \frac{\partial^2 \mathbf{K}^c}{\partial \Lambda^2} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^2 + \\ &\left. + 3 \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + 3 \mathbf{r}_{\Lambda\varepsilon}^c \dot{\Lambda}^{\text{imp}} \ddot{\varepsilon} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda\Lambda}^c (\dot{\Lambda}^{\text{imp}})^3 \right). \end{aligned} \quad (37)$$

## 6. Аналитический анализ чувствительности критического множителя нагрузки и перемещений для предельной точки

Для предельной точки имеем  $\dot{\Lambda}^{\text{imp}}(t_0) = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}(t_0) \neq 0$ . Заметим, что для предельной точки параметр продвижения  $t$  вдоль кривой критических состояний  $I$  может быть равным параметру несовершенства  $\varepsilon$ . Разложения в ряд Тейлора для  $\Lambda^{\text{imp}}$  и  $\mathbf{u}^{\text{imp}}$  записываются следующим образом:

$$\Lambda^{\text{imp}}(t) = \Lambda^{\text{imp}}(t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\Lambda}^{\text{imp}}(t_0) \left( \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)}{\dot{\varepsilon}(t_0)} \right)^2, \quad (38)$$

$$\mathbf{u}^{\text{imp}}(t) = \mathbf{u}^{\text{imp}}(t_0) + \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}(t_0) \begin{pmatrix} \varepsilon(t) - \varepsilon(t_0) \\ \dot{\varepsilon}(t_0) \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Рассмотрим задачу определения производных  $\dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}$ ,  $\ddot{\Lambda}^{\text{imp}}$  по параметру продвижения  $t$  вдоль кривой критических состояний  $I$  (см. рис. 3). Матрица  $\mathbf{K}^c$  является особенной в уравнении (6), и нахождение вектора  $\dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}$  из (6) становится невозможным. Так как критическая точка некратная, то необходимо записать только одно дополнительное уравнение. После умножения уравнения (21) слева на  $\Phi_1^T$  получим одно дополнительное уравнение для определения производной  $\dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}}$ :

$$\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1 \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon} \Phi_1 \dot{\varepsilon} = 0. \quad (40)$$

Для определения  $\ddot{\Lambda}^{\text{imp}}$  умножим слева уравнение (7) на  $\Phi_1^T$  и, принимая во внимание (13), получим

$$\Phi_1^T \dot{\mathbf{K}}^c \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \ddot{\Lambda}^{\text{imp}} + \Phi_1^T \dot{\mathbf{r}}_\varepsilon^c \dot{\varepsilon} = 0. \quad (41)$$

Из уравнения (41) получаем необходимую производную  $\ddot{\Lambda}^{\text{imp}}$ :

$$\ddot{\Lambda}^{\text{imp}} = - \frac{\Phi_1^T (\dot{\mathbf{K}}^c \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \dot{\mathbf{r}}_\varepsilon^c \dot{\varepsilon})}{\Phi_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c}, \quad (42)$$

где

$$\mathbf{r}_\Lambda^c = -\mathbf{P}_0, \quad \dot{\mathbf{K}}^c = \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon}, \quad \dot{\mathbf{r}}_\varepsilon^c = \frac{\partial \mathbf{K}^c}{\partial \varepsilon} \dot{\mathbf{u}}^{\text{imp}} + \mathbf{r}_{\varepsilon\varepsilon}^c \dot{\varepsilon}.$$

## 7. Пример

Ферма Мизеса с начальным несовершенством  $\varepsilon = 5$  мм, показанная на рис. 4, имеет две степени свободы: перемещения узла 2 вдоль осей  $X$  и  $Y$ . Вертикальная консервативная нагрузка  $P_0 = 20,6 \cdot 10^6$  Н приложена в узле 2. Модуль упругости  $E = 68950$  Н/мм<sup>2</sup>, плотность материала  $\rho = 2,75 \cdot 10^{-6}$  кг/мм<sup>3</sup>, длина пролета  $S = 400$  мм. Параметрами проектирования для фермы являются площадь поперечных сечений элементов  $a$  (мм<sup>2</sup>) и высота  $H$  (мм):  $1100 \leq a \leq 1400$ ,  $350 \leq H \leq 400$ .

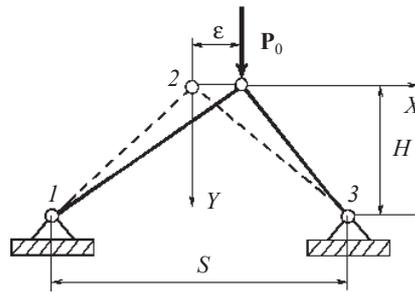


Рис. 4

Два нелинейных уравнения равновесия для фермы записываются в виде:

$$2aE \left[ \frac{((2H - u_Y)u_Y + u_X(S - u_X - 2\varepsilon))(S - 2(u_X + \varepsilon))}{(4H^2 + (S - 2\varepsilon)^2)^{3/2}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{((-2H + u_Y)u_Y + u_X(S + u_X + 2\varepsilon))(S + 2(u_X + \varepsilon))}{(4H^2 + (S + 2\varepsilon)^2)^{3/2}} \Big] = 0, \\
& 4aE(H - u_Y) \left[ \frac{(2H - u_Y)u_Y + u_X(S - u_X - 2\varepsilon)}{(4H^2 + (S - 2\varepsilon)^2)^{3/2}} + \right. \\
& \left. + \frac{(2H - u_Y)u_Y - u_X(S + u_X + 2\varepsilon)}{(4H^2 + (S + 2\varepsilon)^2)^{3/2}} \right] - \Lambda P_0 = 0.
\end{aligned}$$

На рис. 5 показаны равновесные кривые для  $\varepsilon=0$  (рис. 5,а) и  $\varepsilon=5$  мм (рис. 5,б), кривая критических состояний  $I$ , проходящая через симметричную особую точку бифуркации для  $S=400$  мм,  $H=400$  мм,  $a=1000$  мм<sup>2</sup>. Толщина равновесной кривой соответствует величине нагрузки, а цвет равновесной кривой показывает знак нагрузки.

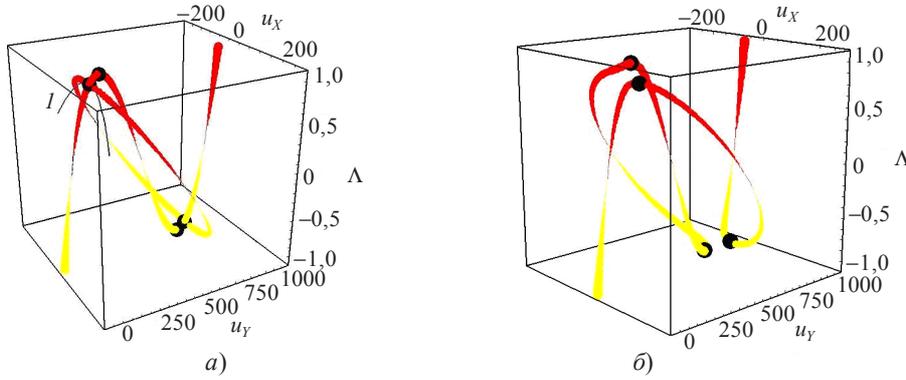


Рис. 5

Компоненты вектора перемещений для предельной точки, расположенной на кривой критических состояний  $I$ , имеют вид:

$$\begin{aligned}
u_X^{\text{imp}} &= \left( \frac{\varepsilon(8H^4 - 10H^2S^2 + 3S^4)}{2(4H^2 + S^2)} \right)^{1/3}, \\
u_Y^{\text{imp}} &= H - \sqrt{H^2 - \frac{S^2}{2}} + \frac{4H^2 - 5S^2}{(4H^2 - 3S^2)\sqrt{4H^2 - 2S^2}} \left( \frac{\varepsilon(8H^4 - 10H^2S^2 + 3S^4)}{2(4H^2 + S^2)} \right)^{2/3}.
\end{aligned}$$

Допустимая область определяется ограничениями на параметры проектирования и ограничением на критическую нагрузку потери устойчивости фермы  $\Lambda^{\text{imp}}(a, H) \geq 1$ , где

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\text{imp}}(a, H) &= \\
&= \frac{2aES^2}{P_0(4H^2 + S^2)^{3/2}} \left[ \sqrt{4H^2 - 2S^2} - \frac{3}{\sqrt{H^2 - S^2/2}} \left( \frac{\varepsilon(8H^4 - 10H^2S^2 + 3S^4)}{2(4H^2 + S^2)} \right)^{2/3} \right].
\end{aligned}$$

Оптимальный проект фермы Мизеса с начальным несовершенством определяется простой предельной точкой  $\{\mathbf{X}^*\}^T = \{1196,11 \text{ мм}^2, 350 \text{ мм}\}$  с массой  $W_{\text{opt}} =$

= 2,652 кг (рис. 6, где обозначено: 1 – кривая для  $\Lambda^{\text{imp}}(a, H) = 1$ , 2 – кривая уровня целевой функции).

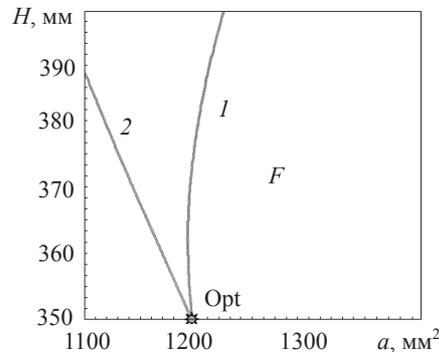


Рис. 6

## 8. Заключение

Выполнен аналитический анализ чувствительности перемещений и четырех типов некратной критической нагрузки потери устойчивости конструкции с начальными глобальными несовершенствами. Для анализа чувствительности применяется прямой метод. Формулируются критерии для обнаружения асимметричной особой точки бифуркации, симметричной особой точки бифуркации первого или второго типа, предельной точки. Приводится пример оптимизации фермы Мизеса с начальными несовершенствами.

### Литература

1. *Сергеев, О.А.* Оптимизация геометрически нелинейных пространственных рам с учетом ограничений по прочности и общей устойчивости / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2001. – Вып. 63. – С. 111–118.
2. *Сергеев, О.А.* Анализ чувствительности и оптимальное проектирование геометрически нелинейных рам с учетом общей потери устойчивости / О.А. Сергеев, С.А. Сергеева, В.Г. Киселев // Вестник ННГУ. Серия Механика. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – Вып. 1(4). – С. 161–175.
3. *Sergeyev, O.A.* Optimization of 3D frame structures for stress and overall stability constraints / O.A. Sergeyev, S.A. Sergeyeva, V.G. Kiselev // Proceedings of the 4-th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization. – Dalian, China. – 2001. – P. 79–80.
4. *Bojczuk, D.* Non-linear sensitivity analysis of discrete structures / D. Bojczuk, Z. Mróz // Foundations of Civil and Environmental Engineering. – 2002. – 1. – P. 19–41.
5. *Mróz, Z.* Sensitivity analysis and optimal design of nonlinear structures / Z. Mróz, J. Piekarski // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1998. – 42. – P. 1231–1262.
6. *Mróz, Z.* Design sensitivity analysis of non-linear structures in regular and critical states / Z. Mróz, R.T. Haftka // Int. J. Solids Struct. – 1994. – 31. – P. 2071–2098.
7. *Koiter, W.T.* The stability of elastic equilibrium / W.T. Koiter: Ph. D. Thesis, H.J. Paris, Amsterdam, Holland, 1945 (in Dutch), English Translation, NASA TTF-10833 (1967).
8. *Сергеев, О.А.* Анализ закритического поведения геометрически нелинейных упругих пространственных рам / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев // Вестник ННГУ. Серия Механика. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2004. – Вып. 1(6). – С. 177–190.
9. *Сергеев, О.А.* Анализ устойчивости равновесных кривых нелинейных конструкций и анализ чувствительности в кратных критических точках / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2006. – Вып. 68. – С. 126–138.

10. *Сергеев, О.А.* Оптимальное проектирование геометрически нелинейных конструкций и анализ чувствительности в некратных и кратных критических точках / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов: Тез. XXIII Междунар. конф. – СПб., 28 сент. – 01 окт. 2009. – Т. 1. – С. 196–197.

11. *Сергеев, О.А.* Оптимальное проектирование геометрически нелинейных конструкций и анализ чувствительности в некратных и кратных критических точках / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов: Тр. XXIII Междунар. конф., СПб., 28 сент. – 01 окт. 2009. – Т. 2. – С. 422–428.

12. Сергеев, О.А. Оптимальное проектирование геометрически нелинейных конструкций и анализ чувствительности в кратных критических точках / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева // Морские интеллектуальные технологии. – 2010. – 1(7). – С. 45–48.

[31.08.2010]

## THE OPTIMIZATION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR BAR STRUCTURES WITH INITIAL GLOBAL IMPERFECTIONS

O.A. Sergeev, V.G. Kiselev

The stability of geometrically nonlinear bar structures with initial global imperfections that may strongly influence the critical loss-of-stability load value is considered. Criteria are formulated for classifying the four types of critical points: asymmetrical special bifurcation point, symmetrical special bifurcation point of the first or second kind, and limit point. Accounting for the initial imperfections of the structure results in the degeneration of asymmetric and symmetric special bifurcation points into limit points. An analytical sensitivity analysis of the four types of non-multiple critical load and nonlinear displacements of structures with initial global imperfections is presented. The direct method is used to analyze the sensitivity. The sought derivatives are required in optimization problems with constraints for the critical loss-of-stability load of the structure, where approximations of active constraints are used. The optimization method is based on the quadratic approximation of the objective function and specially constructed approximations for the four types of the critical loss-of stability load of structures with initial imperfections.

*Key words:* optimization, analytical sensitivity analysis, geometrically nonlinear bar structures, initial global imperfections, critical load, total loss-of-stability, non-multiple limit points, non-multiple special bifurcation points.