

УДК 539.4

## ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СТЕРЖНЕЙ ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ<sup>\*)</sup>

Ю.В. Немировский

*Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск*

Для стержневых конструкций из материалов с существенно различными значениями пределов текучести, прочности и предельных деформаций разрушения в условиях растяжения и сжатия получены общие аналитические выражения для определения первой (при отсутствии упрочнения) и второй (для упрочняющихся материалов) предельных нагрузок и максимальных перемещений. В качестве примера рассмотрен изгиб консольной балки при воздействии распределенных нагрузок. Показано, что предельные амплитуды нагрузок существенно зависят от формы поперечного сечения стержня и меняются при изменении направления действия нагрузки.

*Ключевые слова:* предельное состояние, стержни, разносопротивляющиеся материалы, предельные деформации, упрочняющиеся материалы, идеально-пластичные материалы, жесткопластическая модель.

Теория предельного пластического состояния, основанная на модели идеального жесткопластического материала, оказалась очень удобным практическим инструментом для оценки несущей способности конструкций разнообразного типа и получила широкое применение на практике [1–5]. В абсолютном большинстве случаев при построении расчетных схем используется предположение об одинаковом сопротивлении материалов в условиях растяжения и сжатия. Вместе с тем уже давно отмечается, что многие материалы в условиях растяжения и сжатия обнаруживают существенно различный характер деформирования, особенно при нагружениях с развитыми пластическими деформациями и в состояниях, близких к разрушению. Это проявляется в значительном различии (иногда в несколько раз) пределов текучести, прочности, предельных деформаций разрушения материалов при испытаниях на растяжение и сжатие [6–8]. Игнорирование этих обстоятельств для изгибаемых стержневых элементов, работающих в сечении частично в условиях сжатия и частично в условиях растяжения, может приводить к ошибкам как в оценке предельных нагрузок, так и в оценках предельной их деформированности в состоянии предразрушения [9]. В данной работе рассматривается анализ возможных особенностей реализации предельных состояний в изгибаемых стержневых конструкциях, изготавливаемых из материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена при поддержке Президиума СО РАН (постановление Президиума СО РАН от 15.01.2009 г., грант №15).

При расчетах используются модели упрочняющихся и неупрочняющихся жестко-пластических материалов, в общем случае различные при растяжении и сжатии. Для напряжений и деформаций принимаются следующие зависимости:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 0 \text{ при } -\bar{\sigma}_0^- \leq \bar{\sigma} \leq \bar{\sigma}_0^+, \\ \bar{\sigma}^+ &= \bar{\sigma}_0^+ + \bar{A}_1^+ \varepsilon + \bar{A}_2^+ \varepsilon^2, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*^+, \\ \bar{\sigma}^- &= -\bar{\sigma}_0^- + \bar{A}_1^- \varepsilon + \bar{A}_2^- \varepsilon^2, \quad -\varepsilon_*^- \leq \varepsilon \leq 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $\bar{\sigma}_0^\pm$  – пределы текучести материала при растяжении (+) и сжатии (-);  $\varepsilon_*^\pm$  – предельные деформации при разрушении;  $\bar{\sigma}_B^\pm$  – пределы прочности при разрушении;  $\bar{A}_1^\pm = \bar{A}_2^\pm = 0$  для идеально-пластических моделей,  $\bar{A}_1^\pm = (\bar{\sigma}_B^\pm - \bar{\sigma}_0^\pm)/\varepsilon_*^\pm$ ,  $\bar{A}_2^\pm = 0$  в случае линейного закона упрочнения;  $\bar{A}_1^\pm = 2(\bar{\sigma}_B^\pm - \bar{\sigma}_0^\pm)/\varepsilon_*^\pm$ ,  $\bar{A}_2^\pm = -\bar{A}_1^\pm/(2\varepsilon_*^\pm)$  при параболической аппроксимации соответствующей диаграммы упрочнения.

Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_0^0}, \quad \sigma_0 = \frac{\bar{\sigma}_0}{\bar{\sigma}_0^0}, \quad \sigma_* = \frac{\bar{\sigma}_B}{\bar{\sigma}_0^0}, \quad A_i = \frac{\bar{A}_i}{\bar{\sigma}_0^0} \quad (i=1, 2), \\ z &= \frac{\bar{z}}{\bar{H}_0^0}, \quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{l}}, \quad H = \frac{\bar{H}}{\bar{H}_0^0}, \quad b(x, z) = \frac{\bar{b}(\bar{x}, \bar{z})}{\bar{b}_0^0}, \\ w &= \frac{\bar{w}}{\bar{H}_0^0}, \quad v = \left( \frac{\bar{H}_0^0}{\bar{l}} \right)^2 w, \quad u = \frac{\bar{u}}{\bar{l}}, \quad \chi = \bar{H}_0^0 \bar{\chi}, \\ \bar{\chi} &= -\frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2}, \quad N = \frac{\bar{N}}{2\bar{b}_0^0 \bar{H}_0^0 \bar{\sigma}_0^0}, \quad M = \frac{\bar{M}}{2\bar{b}_0^0 \bar{H}_0^0{}^2 \bar{\sigma}_0^0}.\end{aligned}$$

Здесь  $\bar{\sigma}_0^0, \bar{H}_0^0, \bar{b}_0^0, \bar{l}$  – нормирующие параметры;  $\bar{u}, \bar{w}$  – осевое перемещение и прогиб;  $\bar{z}, \bar{x}$  – поперечная и продольная координаты;  $\bar{b}(\bar{x}, \bar{z})$  – функция, описывающая контур сечения;  $\bar{N}, \bar{M}$  – продольное усилие и изгибающий момент.

Для безразмерных усилия  $N$  и изгибающего момента  $M$  при выборе системы координат в сечении стержня в соответствии с рис. 1, использовании соотношений (1) и гипотезы Кирхгофа–Лява

$$\varepsilon(x, z) = e_0 + z\chi \quad (2)$$

при 
$$e_0 > 0, e_0 - H\chi < 0 \quad (3)$$

получим

$$\begin{aligned}N &= R_1^+(z_1) + R_2^+(z_1)\chi(x) + R_3^+(z_1)\chi^2(x), \\ M &= R_4^+(z_1) + R_5^+(z_1)\chi(x) + R_6^+(z_1)\chi^2(x),\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}R_1^+ &= \sigma_0^+ \Psi_1(z_1) - \sigma_0^- \Phi_1(z_1), \\ R_4^+ &= \sigma_0^+ \Psi_2(z_1) - \sigma_0^- \Phi_2(z_1), \\ R_2^+ &= A_1^+ [\Psi_2(z_1) - z_1 \Phi_1(z_1)] + A_1^- [\Phi_2(z_1) - z_1 \Phi_2(z_1)], \\ R_5^+ &= A_1^+ [\Psi_3(z_1) - z_1 \Phi_2(z_1)] + A_1^- [\Phi_3(z_1) - z_1 \Phi_2(z_1)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3^+ &= A_2^+[z_1^2\Psi_1(z_1) - 2z_1\Psi_2(z_1) + \Psi_3(z_1)] + A_2^-[z_1^2\phi_1(z_1) - 2z_1\phi_2(z_1) + \phi_3(z_1)], \\
R_6^+ &= A_2^+[z_1^2\Psi_2(z_1) - 2z_1\Psi_3(z_1) + \Psi_4(z_1)] + A_2^-[z_1^2\phi_2(z_1) - 2z_1\phi_3(z_1) + \phi_4(z_1)], \\
\Psi_k(z_1) &= \int_{z_1}^0 b(x, z)z^{k-1}dz, \quad \phi_k(z_1) = \int_{-H}^{z_1} b(x, z)z^{k-1}dz \quad (k = \overline{1, 4}), \quad (5)
\end{aligned}$$

$$z_1 = -e_0(x)/\chi(x), \quad (6)$$

$$e_0(x) = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\theta^2(x), \quad \theta(x) = \frac{dv}{dx}, \quad (7)$$

$$-H \leq z_1 \leq 0. \quad (8)$$

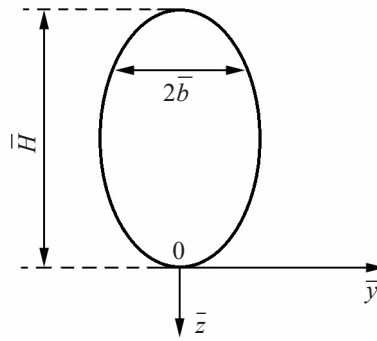


Рис. 1

При деформированном состоянии, соответствующем неравенствам

$$e_0 < 0, \quad e_0 - H\chi > 0, \quad (9)$$

усилие  $N$  и момент  $M$  в сечении будут определяться выражениями

$$\begin{aligned}
N &= R_1^-(z_1) + R_2^-(z_1)\chi + R_3^-(z_1)\chi^2, \\
M &= R_4^-(z_1) + R_5^-(z_1)\chi + R_6^-(z_1)\chi^2, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_1^- &= \sigma_0^+\phi_1(z_1) - \sigma_0^-\Psi_1(z_1), \quad R_4^- = \sigma_0^+\phi_2(z_1) - \sigma_0^-\Psi_2(z_1), \\
R_2^- &= A_1^+[\phi_2(z_1) - z_1\phi_1(z_1)] + A_1^-[\Psi_2(z_1) - z_1\Psi_1(z_1)], \\
R_5^- &= A_2^+[z_1^2\phi_1(z_1) - 2z_1\phi_2(z_1) + \phi_3(z_1)] + A_2^-[z_1^2\Psi_1(z_1) - 2z_1\Psi_2(z_1) + \Psi_3(z_1)], \\
R_6^- &= A_2^+[z_1^2\phi_2(z_1) - 2z_1\phi_3(z_1) + \phi_4(z_1)] + A_2^-[z_1^2\Psi_2(z_1) - 2z_1\Psi_3(z_1) + \Psi_4(z_1)].
\end{aligned}$$

Таким образом, в предельных состояниях стержень будет по характеру деформирования подразделяться на деформируемые части, описываемые соотношениями (4)–(8) при  $e_0 > 0, \chi > 0$ , соотношениями (6)–(10) при  $e_0 < 0, \chi < 0$ , и на жесткие части, для которых  $e_0 = 0, \chi = 0$ . На границах участков должны выполняться традиционные условия непрерывности внутренних силовых факторов и кинематических характеристик, обеспечивающие условия сплошности конструкции. Первое предельное состояние получим, используя и в области растяжения, и в области сжатия модель идеально-пластического материала, т.е. принимая  $A_1^\pm = A_2^\pm = R_2^\pm = R_3^\pm =$

$= R_5^\pm = R_6^\pm = 0$ . В случае поперечного изгиба балок будем иметь тогда при  $e_0 > 0$ ,  $\chi > 0$  следующее уравнение для  $z_1$ :

$$\frac{\Psi_1(z_1)}{\Phi_1(z_1)} = \frac{\sigma_0^-}{\sigma_0^+},$$

и предельный изгибающий момент будет равен

$$M_0^+ = R_4^+(z_1) = \sigma_0^+ \Psi_2(z_1) - \sigma_0^- \Phi_2(z_1).$$

При  $e_0 < 0$ ,  $\chi < 0$  уравнение для  $z_1$  имеет вид

$$\frac{\Psi_1(z_1)}{\Phi_1(z_1)} = \frac{\sigma_0^+}{\sigma_0^-},$$

и предельный изгибающий момент задается равенством

$$M_0^- = R_4^-(z_1) = \sigma_0^+ \Phi_2(z_1) - \sigma_0^- \Psi_2(z_1).$$

Таким образом, амплитуда первой предельной нагрузки зависит от направления ее действия (вдоль оси  $z$  или в противоположном направлении).

Второе предельное состояние в сечении стержня (состояние предразрушения) будет зависеть от уровней предельно допустимых деформаций  $\varepsilon_*^+$  и  $\varepsilon_*^-$ . Для многих конструкционных материалов испытания обнаруживают выполнение неравенства  $\varepsilon_*^+ < \varepsilon_*^-$  [6, 7]. В этом случае в сечении с характером деформирования  $e_0 > 0$ ,  $\chi > 0$  второе предельное состояние наступит при выполнении равенства

$$e_0 = \varepsilon_*^+ (e_0 - H\chi > -\varepsilon_*^+). \quad (15)$$

При этом

$$z_1 = z_{1*}^+ = -\frac{\varepsilon_*^+}{\chi_*^+}, \quad (16)$$

$$\frac{\varepsilon_*^+}{H} < \chi_*^+ < \frac{\varepsilon_*^- + \varepsilon_*^+}{H}. \quad (17)$$

При поперечном изгибе стержня ( $N = 0$ ) из первого уравнения (4) получим в зависимости от формы поперечного сечения стержня алгебраическое уравнение для  $\chi_*^+$ . Подставляя корень этого уравнения и значение  $z_{1*}^+$  из (16) во второе соотношение (4), получим значение второго предельного момента  $M_*^+$  для случая  $e_0 > 0$ ,  $\chi > 0$ . При изгибании стержня, соответствующем неравенствам  $e_0 < 0$ ,  $\chi < 0$ , вместо (15)–(17) для определения второго предельного момента  $M_*^-$  используем равенства (10) и соотношения

$$e_0 - H\chi_*^- = \varepsilon_*^+ (e_0 > \varepsilon_*^+), \quad (18)$$

$$z_{1*}^- = -H - \frac{\varepsilon_*^+}{\chi_*^-}, \quad (19)$$

$$-\frac{\varepsilon_*^- + \varepsilon_*^+}{H} < \chi_*^- < -\frac{\varepsilon_*^+}{H}. \quad (20)$$

Для определения первой и второй предельных нагрузок и максимально допустимых прогибов стержней в состоянии предразрушения должны быть заданы

конкретные условия их нагружения и закрепления. Рассмотрим консольно защемленную балку длины  $l$ , нагруженную сосредоточенной нагрузкой  $Q$  на свободном конце. При нагружении, соответствующем условиям деформирования  $e_0 > 0$ ,  $\chi > 0$ , первая и вторая предельные нагрузки будут равны

$$Q_0^+ = M_0^+ / l, \quad Q_*^+ = M_*^+ / l. \quad (21)$$

При нагрузке  $Q_*^+$  распределение изгибающего момента  $M(x)$  определяется равенством

$$M(x) = M_*^+ (l - x). \quad (22)$$

При этом на участке  $0 \leq x \leq x_0^+$  балка деформируется в соответствии с закономерностями (4), а на участке  $x_0^+ \leq x \leq l$  остается жесткой. Координата  $x_0^+$  определяется равенством

$$x_0^+ = l - M_0^+ / M_*^+. \quad (23)$$

При  $N=0$  из соотношений (4), учитывая зависимость (21) на отрезке  $0 \leq x \leq x_0^+$ , для конкретной формы поперечного сечения балки получим значения функций  $\chi(x)$  и  $z_1(x)$  в виде равенств

$$\chi(x) = f_1^+(x), \quad z_1^+(x) = f_2^+(x), \quad (24)$$

с помощью которых, учитывая условия защемления на участке  $0 \leq x \leq x_0^+$ , найдем распределения прогибов  $v(x)$  и углов поворота  $\theta(x)$ :

$$v(x) = - \int_0^x \left[ \int_0^x f^+(x) dx \right] dx, \quad \theta(x) = - \int_0^x f^+(x) dx. \quad (25)$$

На участке  $x_0^+ \leq x \leq l$  балка остается жесткой и ее прогиб определяется равенством

$$v(x) = C_1 x + C_2, \quad (26)$$

$$C_1 = - \int_0^x f^+(x) dx, \quad C_2 = x_0^+ C_1 - \int_0^x \left[ \int_0^x f^+(x) dx \right] dx.$$

При нагружении в противоположном направлении аналогичным образом вместо (21)–(24) получим выражения

$$Q_0^- = M_0^- / l, \quad Q_*^- = M_*^- / l,$$

$$x_0^- = l - M_0^- / M_*^-,$$

$$\chi(x) = f_1^-(x), \quad z_1^-(x) = f_2^1(x).$$

Для прогибов и углов поворота будут верны формулы (25), (26) при условии, что функцию  $f_1^+(x)$  в них заменит функция  $f_1^-(x)$ .

#### Литература

1. Гвоздев, А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия / А.А. Гвоздев. – М.: Стройиздат, 1949. – 280 с.
2. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. I / А.А. Ильюшин. – М.: Гостехиздат, 1948. – 370 с.
3. Ходж, Ф.Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций / Ф.Г. Ходж. – М.: Машгиз, 1963. – 380 с.

4. *Ивлев, Д.Д.* Теория предельного состояния и идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2005. – 205 с.

5. *Надаи, А.* Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. – 647 с.

6. *Лихарев, К.К.* Сопоставление характеристик материалов при одноосных растяжении и сжатии / К.К. Лихарев // Расчеты на прочность в машиностроении. Вып. 89. – М.: Машгиз, 1958. – С. 168–196.

7. *Конюшко, З.М.* Исследование прочности термически обработанной инструментальной стали при растяжении и сжатии / З.М. Конюшко // Вестник машиностроения. – 1955. – №2.

8. *Цвиккер, У.* Титан и его сплавы / У. Цвиккер. – М.: Metallurgia, 1979. – 512 с.

9. *Немировский, Ю.В.* Второе предельное состояние однородных и композитных балок / Ю.В. Немировский // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2009. – №1. – С. 150–159.

[29.08.2010]

## THE ULTIMATE STATE OF BARS MADE OF MATERIALS WITH DIFFERENT STRENGTH CHARACTERISTICS

**Yu.V. Nemirovsky**

General analytical expressions for determining the first (in the absence of hardening) and the second (for hardening materials) ultimate loads and maximum displacements are obtained for bar structures made of materials considerably differing in the values of yield strength, ultimate strength and ultimate strain, loaded in tension and compression. Bending of a cantilever beam under distributed loads is analyzed as an example. The ultimate loading amplitudes are shown to considerably depend on the cross-section geometry of the bar and alter with the change of the direction of the loading.

*Key words:* ultimate state, bars, materials with different strengths, ultimate strains, hardening materials, ideally plastic materials, rigid-plastic model.