

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ОБОЛОЧЕК. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ

А.И. Голованов

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Изложены теоретические основы моделирования больших деформаций оболочек при использовании изопараметрических конечно-элементных аппроксимаций. Физическая модель упругопластического материала основана на мультипликативном разложении градиента полных деформаций на упругую и пластическую составляющие. Используется лагранжево описание процесса деформирования в криволинейных координатах. Определяющие соотношения и закон пластического течения строятся из уравнения термодинамики для пары пространственных тензоров: тензора меры деформации Альманси и тензора напряжений Кирхгофа. Тензорные уравнения приводятся к скалярному виду, в котором фигурируют градиенты свободной энергии, градиенты уравнений предельного состояния и специальный тензор, характеризующий уровень накопленных пластических деформаций. Обсуждаются явная и неявная схемы интегрирования уравнения пластического течения. Задаются вопросы применения построенных соотношений для расчета оболочек. Изначально речь идет о применении метода пошагового нагружения (интегрирования по времени), поэтому приводятся некоторые соотношения для приращения основных векторных и тензорных величин.

Ключевые слова: оболочки, большие упругопластические деформации, конечные элементы, изопараметрическая аппроксимация, метод пошагового нагружения.

Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1] и посвящена изложению теоретических основ моделирования больших деформаций оболочек при использовании изопараметрических конечно-элементных аппроксимаций. Физическая модель упругопластического материала основана на мультипликативном разложении градиента полных деформаций на упругую и пластическую составляющие [2]. Используется лагранжево описание процесса деформирования в криволинейных координатах [3–5] в соответствии с методологией, известной в литературе под названием «преобразование метрических тензоров» (metric transformation tensor). Подобный подход использовался в работах [6–16] для моделирования трехмерного напряженно-деформированного состояния. В задачах о конечных деформациях оболочек примеры применения такого подхода даны в работах [17–20].

В частности, в работе дается содержательное описание кинематики конечных

упругопластических деформаций в криволинейных координатах. При этом вводятся и используются базисы исходного состояния, актуальной конфигурации и так называемого «разгруженного состояния». Последнее состояние появляется при принятии гипотезы о мультипликативном разложении градиента полных деформаций на упругую и неупругую составляющие. Подобное разложение является альтернативой аддитивному разложению тензора скорости деформаций. Отметим, что в отечественной научно-технической литературе доминирует аддитивный закон скоростей упругих и пластических деформаций, а в зарубежной, наоборот, – мультипликативное разложение. В настоящей работе (да и не только в ней) показывается, что изначальное мультипликативное разложение градиента деформаций может быть приведено к аддитивной форме специально построенных деформаций и их скоростей.

Во второй части работы строятся физические соотношения, а именно определяющие соотношения и закон пластического течения, для выбранной пары пространственных тензоров: тензора меры деформации Альманси и тензора напряжений Кирхгофа. Тензорные уравнения приводятся к скалярному виду, в котором фигурируют градиенты свободной энергии, градиенты уравнения предельного состояния и специальный тензор, характеризующий уровень накопленных пластических деформаций. Обсуждаются явная и неявная схемы интегрирования уравнения пластического течения. Отмечается преимущество неявной схемы Эйлера.

Третья часть работы затрагивает вопросы применения построенных ранее соотношений для расчета оболочек. Речь идет о методике моделирования оболочки как трехмерного тела с однослойной аппроксимацией по толщине и введения в качестве узловых степеней свободы координат точек на срединной поверхности и специальных векторов, характеризующих «поперечное распределение материала оболочки». Изначально речь идет о применении метода пошагового нагружения (интегрирования по времени), поэтому приводятся некоторые соотношения для приращения основных векторных и тензорных величин. Подобные методики были апробированы автором ранее [21, 22]. В заключение обсуждаются вопросы представления (или аппроксимации) ковариантных компонент метрического тензора «промежуточной конфигурации» и проблемы, связанные с вычислением градиента свободной энергии по мере Альманси при задании ее как функции инвариантов классических мер упругих деформаций.

1. Кинематика упругопластических деформаций

Будем использовать криволинейные лагранжевы координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3 , которые тождественно совпадают с локальными безразмерными координатами, определенными внутри каждого конечного элемента (КЭ) самостоятельно, т.е. $-1 \leq \xi^k \leq 1$.

В исходной конфигурации радиус-вектор материальной точки определим в виде $\mathbf{R} = X^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\mathbf{e}_i$, где \mathbf{e}_i – орты декартовой системы координат, относительно которой исследуется процесс деформирования. В этой конфигурации введем:

– основной и сопряженный базисы $\mathbf{R}_k = \partial X^i / \partial \xi^k \mathbf{e}_i$, $\mathbf{R}^k = \partial \xi^k / \partial X^i \mathbf{e}_i$;

– метрический тензор $(\mathbf{G}) = G_{ij}(\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = G^{ij}(\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j)$.

По аналогии в актуальном состоянии определим:

– радиус-вектор материальной точки $\mathbf{r} = x^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\mathbf{e}_i$;

– вектор скорости движения $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\mathbf{e}_i = v^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\mathbf{e}_i$;

– основной и сопряженный базисы $\mathbf{r}_k = \partial x^i / \partial \xi^k \mathbf{e}_i$, $\mathbf{r}^k = \partial \xi^k / \partial x^i \mathbf{e}_i$;

– метрический тензор $(\mathbf{g}) = g_{ij}(\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = g^{ij}(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j)$.

В качестве базового примем тензор градиента деформации $(\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_i \mathbf{R}^j)$, с помощью которого вводятся правый и левый тензоры Коши – Грина

$$(\mathbf{C}) = (\mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{g}) \cdot (\mathbf{F}) = g_{ij}(\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j), \quad (\mathbf{B}) = (\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{F})^T = G^{ij}(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j); \quad (1.1)$$

правый и левый тензоры Пиолы

$$(\mathbf{C})^{-1} = (\mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{g}) \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T = g^{ij}(\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j), \quad (\mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}) = G_{ij}(\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j); \quad (1.2)$$

тензоры деформации Коши – Грина и Альманси

$$(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{C}) - (\mathbf{G})] = \frac{1}{2}[g_{ij} - G_{ij}](\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j), \quad (1.3)$$

$$(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{g}) - (\mathbf{B}^{-1})] = \frac{1}{2}[g_{ij} - G_{ij}](\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j), \quad (1.4)$$

тензор пространственного градиента скорости

$$(\mathbf{h}) = (\dot{\mathbf{F}}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}) = (\dot{\mathbf{r}}_i \mathbf{r}^i) = (\mathbf{v}_i \mathbf{r}^i), \quad (1.5)$$

его симметричная часть (\mathbf{d}) (тензор деформации скорости) и антисимметричная $(\mathbf{\omega})$ (тензор скорости вращения).

Отметим, что тензоры, определяемые диадами базисных векторов исходной конфигурации, называют материальными (лагранжевыми), а тензоры, диады которых состоят из базисных векторов текущей конфигурации, называют пространственными (эйлеровыми).

В [1] были введены производные Ли (Lie derivative) пространственных тензоров. Для ковариантных компонент тензора (например, тензора деформаций Альманси) производная Ли имеет вид:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}^\Lambda \mathbf{A}) &= (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \frac{d}{dt} [(\mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{F})] \cdot (\mathbf{F}^{-1}) = \\ &= (\dot{\mathbf{A}}) + (\mathbf{h})^T \cdot (\mathbf{A}) + (\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{h}) = \dot{A}_{ij}(\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}(\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Легко показать справедливость соотношений

$$(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}(\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j), \quad (\mathfrak{R}^\Lambda \mathbf{B}^{-1}) = 0, \quad (1.7)$$

$$(\mathbf{d}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{h}) + (\mathbf{h})^T] = (\mathfrak{R}^\Lambda \mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{R}^\Lambda \mathbf{g}) = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\dot{\mathbf{E}}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}(\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j).$$

Будем использовать мультипликативное разложение тензора градиента деформаций в виде

$$(\mathbf{F}) = (\mathbf{F}_e) \cdot (\mathbf{F}_p). \quad (1.8)$$

На рис. 1 представлена обычно используемая иллюстрация введенного разложения. Здесь предполагается введение так называемой промежуточной конфигурации с исключенными упругими деформациями, которую будем характеризовать базисными векторами $\mathbf{q}_k, \mathbf{q}^k$, определяющими соответствующий метрический тензор $(\hat{\mathbf{g}}) = \hat{g}_{ij}(\mathbf{q}^i \mathbf{q}^j) = \hat{g}^{ij}(\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j)$. С учетом введенных обозначений справедливы представления:

$$(\mathbf{F}_e) = (\mathbf{r}_i \mathbf{q}^i) = g_{ki} (\mathbf{r}^k \mathbf{q}^i) = \mathbf{g}^{ki} (\mathbf{r}_i \mathbf{q}_k), \quad (1.9)$$

$$(\mathbf{F}_p) = (\mathbf{q}_i \mathbf{R}^i) = g_{ki} (\mathbf{q}^k \mathbf{R}^i) = G^{ki} (\mathbf{q}_i \mathbf{R}_k). \quad (1.10)$$

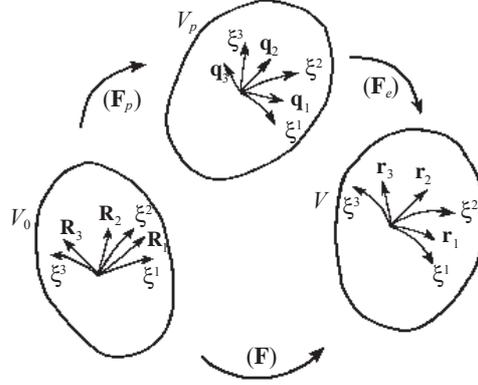


Рис. 1

Введем тензоры, аналогичные тензорам (1.1)–(1.4), характеризующие упругие и пластические деформации. В частности, используя выражения (1.9), (1.10), определим меру пластических деформаций Коши – Грина

$$(\mathbf{C}_p) = (\mathbf{F}_p)^T \cdot (\hat{\mathbf{g}}) \cdot (\mathbf{F}_p) = \hat{g}_{ij} (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) \quad (1.11)$$

и меру упругих деформаций Фингера

$$(\mathbf{B}_e^{-1}) = (\mathbf{F}_e^{-1})^T \cdot (\hat{\mathbf{g}}) \cdot (\mathbf{F}_e^{-1}) = \hat{g}_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j); \quad (1.12)$$

тензоры деформаций Коши – Грина

$$(\mathbf{E}_p) = \frac{1}{2} [(\mathbf{C}_p) - (\mathbf{G})] = \frac{1}{2} [\hat{g}_{ij} - G_{ij}] (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j), \quad (1.13)$$

$$(\mathbf{E}_e) = \frac{1}{2} [(\mathbf{C}) - (\mathbf{C}_p)] = \frac{1}{2} [g_{ij} - \hat{g}_{ij}] (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j); \quad (1.14)$$

тензоры деформаций Альманси

$$(\mathbf{A}_e) = \frac{1}{2} [(\mathbf{g}) - (\mathbf{B}_e^{-1})] = \frac{1}{2} [g_{ij} - \hat{g}_{ij}] (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j), \quad (1.15)$$

$$(\mathbf{A}_p) = \frac{1}{2} [(\mathbf{B}_e^{-1}) - (\mathbf{B}^{-1})] = \frac{1}{2} [\hat{g}_{ij} - G_{ij}] (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j). \quad (1.16)$$

Отметим справедливость аддитивных представлений для тензоров деформаций, как материальных (1.3), (1.13), (1.14), так и пространственных (1.4), (1.15), (1.16)

$$(\mathbf{E}) = (\mathbf{E}_e) + (\mathbf{E}_p), \quad (\mathbf{A}) = (\mathbf{A}_e) + (\mathbf{A}_p), \quad (1.17)$$

и соотношения

$$(\mathbf{B}_e^{-1}) = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{C}_p) \cdot (\mathbf{F}^{-1}). \quad (1.18)$$

По аналогии с (1.5) введем тензор градиента скорости пластических деформаций $(\mathbf{h}_p) = (\dot{\mathbf{F}}_p) \cdot (\mathbf{F}_p^{-1}) = (\dot{\mathbf{q}}_i \mathbf{q}^i)$ и его симметричную часть

$$(\mathbf{d}_p) = \frac{1}{2}[(\mathbf{h}_p) + (\mathbf{h}_p)^T] = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}(\mathbf{q}^i \mathbf{q}^j). \quad (1.19)$$

Так как тензоры деформаций Коши – Грина (1.3), (1.13), (1.14) определены в базе исходной конфигурации, то для их материальных производных будет справедливо аддитивное представление

$$(\dot{\mathbf{E}}) = (\dot{\mathbf{E}}_e) + (\dot{\mathbf{E}}_p). \quad (1.20)$$

Для пространственных тензоров (1.4), (1.15), (1.16) аналогичное разложение приводит к обобщенным производным

$$(\hat{\mathfrak{R}}^\Lambda \mathbf{A}) = (\hat{\mathfrak{R}}^\Lambda \mathbf{A}_e) + (\hat{\mathfrak{R}}^\Lambda \mathbf{A}_p). \quad (1.21)$$

Дифференцируя соотношение (1.18) с учетом выражений (1.6), (1.8), (1.11), (1.12), (1.19), получим

$$(\hat{\mathfrak{R}}^\Lambda \mathbf{B}_e^{-1}) = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\dot{\mathbf{C}}_p) \cdot (\mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{F}_e^{-1})^T \cdot (\mathbf{d}_p) \cdot (\mathbf{F}_e^{-1}) = \dot{g}(\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j). \quad (1.22)$$

Приведенные соотношения являются кинематической основой построения определяющих соотношений и уравнений пластического течения. Фактически они представляют собой либо определение аддитивных разложений тензоров деформаций (1.17), (1.20), (1.21), либо задание связи пространственных тензоров, характеризующих упругие деформации, с материальными тензорами, описывающими пластические деформации (1.22), причем в основе лежит мультипликативное разложение (1.8).

Следует отметить, что кинематика упругопластических деформаций на основе мультипликативного разложения явно доминирует в работах зарубежных ученых. Существует ряд способов ее построения, и описываемый здесь явно не самый распространенный. Близкое по смыслу, но отличное по терминологии описание кинематики конечных деформаций в криволинейных базисах соответствующих метрических тензоров достаточно полно дано в работах [6, 7, 12–14, 17]. Отметим, что в изложениях упомянутых работ широко используются понятия push-forward и pull-backs преобразований.

2. Определяющие соотношения, уравнения пластического течения

Введем в рассмотрение второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа, определенный в виде контравариантных компонент в основном базисе исходной конфигурации, $(\mathbf{S}) = \tau^{ij}(\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j)$ и тензор напряжений Кирхгофа $(\boldsymbol{\tau}) = \tau^{ij}(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j)$. Эти тензоры связаны между собой соотношением

$$(\mathbf{S}) = (\mathbf{F}^{-1}) \cdot (\boldsymbol{\tau}) \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T, \quad (2.1)$$

которое переводит пространственный тензор в материальный. Введенные тензоры относятся к единице объема недеформированного состояния.

Тензор истинных напряжений Коши – Эйлера связан с тензором напряжений Кирхгофа соотношением

$$(\boldsymbol{\sigma}) = J^{-1}(\boldsymbol{\tau}) = J^{-1} \tau^{ij}(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) = \sigma^{ij}(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j), \quad (2.2)$$

где J – относительное изменение объема.

Рассмотрим технологию построения определяющих соотношений на основе уравнений термодинамики. Например, если записать второй закон термодинамики

для изотермического деформирования в виде

$$\rho_0 \dot{\Psi} - (\boldsymbol{\tau}) \cdot \cdot (\mathbf{d}) \leq 0, \quad (2.3)$$

то, выбирая для функции свободной энергии аргументами компоненты соответствующих тензоров упругих деформаций, получим определяющие соотношения для тензора напряжений Коши в виде функций от тех же тензоров деформаций. Также из (2.3) следует диссипативное неравенство, которое в сочетании с условием текучести дает обобщенное уравнение пластического течения.

Пусть функция свободной энергии зависит от меры Альманси упругих деформаций (1.18), т.е. $\Psi = \Psi(\mathbf{B}_e^{-1})$. Тогда имеем

$$\dot{\Psi} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) \cdot \cdot (\dot{\mathbf{B}}_e^{-1}). \quad (2.4)$$

Из (1.18) и (1.22) следует

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{B}}_e^{-1}) &= (\widehat{\mathfrak{K}}^\Lambda \mathbf{B}_e^{-1}) - (\mathbf{h})^T \cdot (\mathbf{B}_e^{-1}) - (\mathbf{B}_e^{-1}) \cdot (\mathbf{h}) = \\ &= (\widehat{\mathfrak{K}}^\Lambda \mathbf{B}_e^{-1}) - (\mathbf{d}) \cdot (\mathbf{B}_e^{-1}) - (\mathbf{B}_e^{-1}) \cdot (\mathbf{d}) + (\boldsymbol{\omega}) \cdot (\mathbf{B}_e^{-1}) - (\mathbf{B}_e^{-1}) \cdot (\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Полученные выражения подставляем в неравенство (2.3) и собираем слагаемые при одинаковых множителях

$$\begin{aligned} & - \left\{ (\boldsymbol{\tau}) + \rho_0 \left[(\mathbf{B}_e^{-1}) \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) \cdot (\mathbf{B}_e^{-1}) \right] \right\} \cdot \cdot (\mathbf{d}) + \\ & + \rho_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) \cdot (\mathbf{B}_e^{-1}) - (\mathbf{B}_e^{-1}) \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) \right] \cdot \cdot (\boldsymbol{\omega}) + \rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) \cdot \cdot (\widehat{\mathfrak{K}}^\Lambda \mathbf{B}_e^{-1}) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отсюда получаем ограничения на выражение свободной энергии (условие коммутативности меры Альманси упругих деформаций и градиента свободной энергии)

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) \cdot (\mathbf{B}_e^{-1}) = (\mathbf{B}_e^{-1}) \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right), \quad (2.7)$$

соотношение упругости

$$(\boldsymbol{\tau}) = -2\rho_0 (\mathbf{B}_e^{-1}) \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) = -2\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) \cdot (\mathbf{B}_e^{-1}) \quad (2.8)$$

и диссипативное неравенство

$$D_p = \rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) \cdot \cdot (\widehat{\mathfrak{K}}^\Lambda \mathbf{B}_e^{-1}) \leq 0. \quad (2.9)$$

Запишем в покомпонентном виде полученное определяющее соотношение

$$\tau^{ij} = -2\mu^{in} g^{lj} g_{nl}, \quad (2.10)$$

где введено выражение

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) = \mu^{ij} (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j). \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.8) выразим градиент свободной энергии через напряжения и подставим в неравенство (2.9). В результате получим диссипативное неравенство в терминах напряжений, деформаций и скоростей деформаций

$$D_p = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}) \cdot [(\hat{\mathfrak{K}}^\Lambda \mathbf{B}_e^{-1}) \cdot (\mathbf{B}_e)] \leq 0. \quad (2.12)$$

Введем в рассмотрение условие пластического течения (уравнение предельного состояния) в виде

$$\Phi(\boldsymbol{\tau}^{ij}, \chi_m) \leq 0, \quad (2.13)$$

где χ_m – параметры состояния. Составим функционал

$$\Upsilon(\boldsymbol{\tau}^{ij}, \dots) = D_p(\boldsymbol{\tau}^{ij}, \dots) + \dot{\lambda} \Phi(\boldsymbol{\tau}^{ij}, \chi_m) \leq 0 \quad (2.14)$$

и сформулируем условие минимума этого функционала по компонентам тензора напряжений. В результате получим уравнение

$$(\hat{\mathfrak{K}}^\Lambda \mathbf{B}_e^{-1}) = -2\dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) \cdot (\mathbf{B}_e^{-1}). \quad (2.15)$$

Полученное соотношение является обобщением уравнения пластического течения, используемого в классических соотношениях теории пластического течения. Краеугольным камнем в построении определяющих соотношений и уравнения пластического течения является выбор тензора или группы тензоров, от которых зависит свободная энергия. Используемый здесь вариант известен и представлен в разных вариантах, например в работах [10, 16, 23], в модернизированной форме (с явным выделением объемных деформаций) тензор меры упругих деформаций Альманси систематически используется в монографии [24]. Альтернативой служит использование как базового обратного тензора (B_e). Подробности можно найти в работах [6, 8, 12, 18].

Характерной чертой разрабатываемой схемы является использование пространственных тензоров, которые определяются диадами базисных векторов актуальной конфигурации. Однако следует отметить большую популярность материальных постановок, в которых главную роль играет тензор деформации Коши – Грина (1.3), разложения (1.17), (1.20) и второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа. Различные варианты построения физических соотношений при использовании различных тензоров приведены в [8–10, 13, 20, 23 и др.].

С учетом обозначения

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right) = \pi^{ij}(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) \quad (2.16)$$

и соотношений (1.12), (1.22) получим уравнение относительно ковариантных компонент метрического тензора промежуточного состояния

$$\hat{g}_{ij} = -2\dot{\lambda} \pi^{mn} g_{mi} \hat{g}_{nj}. \quad (2.17)$$

Это уравнение является в высшей степени нелинейным, поэтому для его решения применяются методы численного интегрирования по времени (параметру нагружения). В литературе эти методы отличаются большим многообразием и у разных авторов изложены различные варианты. Например, в [8, 19, 23 и др.] его называют return mapping algorithm, в [11] – predictor-corrector method.

Кратко рассмотрим простейшие из них:

- пусть индекс k будет означать текущее состояние системы и будем его ставить слева вверху от определяемой величины;
 - текущая конфигурация определяется решением задачи с тем или иным тензором упругопластических деформаций (даже по упругому закону) и она принимается в качестве базовой, т.е. компоненты тензора ${}^{k+1}g_{ij}$ и ${}^{k+1}g^{ij}$ считаются известными;
 - производные заменим знаком приращения.
- Тогда уравнение (2.17) преобразуется к виду

$$\Delta^k \hat{g}_{ij} = -2\Delta^k \lambda^k \pi^{mn} {}^{k+1}g_{mi} \hat{g}_{nj}. \quad (2.18)$$

Подобная схема называется явной схемой Эйлера. Она напрямую позволяет вычислить компоненты тензора ${}^{k+1}\hat{g}_{ij} = {}^k\hat{g}_{ij} - 2\Delta^k \lambda^k \pi^{mn} {}^{k+1}g_{mi}$. По этим значениям из уравнения предельного состояния (2.13) строится уравнение для определений величины приращения пластических деформаций $\Delta^k \lambda$, оно решается, определяется величина $\Delta^k \lambda$, вычисляются ${}^{k+1}\hat{g}_{mi}$, определяется текущее напряженное состояние по соотношению (2.10) и накопленный уровень пластических деформаций в виде ${}^{k+1}\lambda = {}^k\lambda + \Delta^k \lambda$.

Рассмотрим более сложную неявную схему Эйлера [8, 9, 14, 18]. В этом случае соотношение (2.18) усложняется и принимает вид:

$$\Delta^k \hat{g}_{ij} = -2\Delta^k \lambda^{k+1} \pi^{mn} {}^{k+1}g_{mi} \hat{g}_{nj}. \quad (2.19)$$

Для решения задачи вводят так называемые пробные напряжения, которые строятся следующим образом:

- вводятся «пробные» пластические деформации ${}^{k+1}\hat{g}_{ij}^{Tr} = {}^k\hat{g}_{ij} - ({}^{k+1}g_{ij} - {}^k g_{ij})$;
- вычисляются «пробные» напряжения ${}^{k+1}\tau_{Tr}^{ij} = -2\rho_0 {}^{k+1}\mu_{Tr}^{in} {}^{k+1}g^{lj} {}^{k+1}\hat{g}_{nj}^{Tr}$;
- из условия предельного равновесия определяется величина $\Delta^k \lambda$;
- определяется новое значение «пробного» пластического состояния ${}^{k+1}\hat{g}_{ij}^{Tr} = {}^k\hat{g}_{ij} - 2\Delta^k \lambda^{k+1} \pi^{mn} {}^{k+1}g_{mi} \hat{g}_{nj}^{Tr}$;
- дальнейшие действия практически тождественны и имеют вид итерационного процесса.

Фактически речь идет о двух итерационных циклах, вложенных друг в друга. Первый цикл имеет целью получение значений приращений пластических деформаций, а второй – построение метрики разгруженного состояния, которое, в свою очередь, связано с величинами напряжений. Однако следует учесть, что построенные таким образом напряжения уже не удовлетворяют глобальным балансовым уравнениям (в частности, уравнения равновесия не выполняются). Поэтому вместо второго цикла итераций целесообразно организовать итерационный процесс типа Ньютона уже глобального типа. Поэтому «уточненное пробное» состояние считается истинным, то есть

$${}^{k+1}\hat{g}_{ij} = {}^k\hat{g}_{ij} - 2\Delta_1^k \lambda^{k+1} \pi^{mn} {}^{k+1}g_{mi} \hat{g}_{nj}^{Tr}. \quad (2.20)$$

Далее вычисляется тензор меры Альманси $({}^{k+1}\mathbf{B}_e^{-1}) = {}^{k+1}\hat{g}_{ij} ({}^{k+1}\mathbf{r}^i {}^{k+1}\mathbf{r}^j)$; определяется градиент упругого потенциала ${}^{k+1}\mu^{ij} ({}^{k+1}\mathbf{r}_i {}^{k+1}\mathbf{r}_j)$ и вычисляются напряжения ${}^{k+1}\tau^{ij} = -2\rho_0 {}^{k+1}\mu^{in} {}^{k+1}g^{lj} {}^{k+1}\hat{g}_{nl}$, которые считаются «истинными напряжениями».

Так строится схема разделения упругих и неупругих деформаций и вычисление напряженного состояния при известной «новой» геометрии. Разумеется, здесь существуют «подводные камни», так как нет конкретных физических моделей, а именно: выражение свободной энергии и условия пластичности.

3. Особенности построения конечного элемента оболочки

Как упоминается в статье [1], приведенные соотношения имеют непосредственный интерес именно в анализе оболочек. Действительно, в анализе существенно трехмерных изделий введение криволинейных координат вносит лишь дополнительные вычисления, которые зачастую губительно сказываются на точности суммарных вычислений. При моделировании процесса деформации оболочки важно выделить направление нормального волокна, т.е. направленного по нормали к срединной поверхности.

Действительно, подобный подход в сочетании с адекватной трехмерной теорией деформируемого континуума позволяет выделить в явном виде деформации и напряжения, ориентированные относительно срединной поверхности в актуальной конфигурации. Это позволяет построить аппроксимации повышенной точности для деформаций поперечного сдвига и обжатия по технологиям, предложенным в [21, 24]. В процессе деформирования, при котором нелинейные эффекты становятся все более значимыми, имеется механизм корректировки тех или иных компонент напряжений (возможным снижением напряжений поперечного сдвига или обжатия, которые для достаточно тонких оболочек существенны).

Следуя [1], будем считать поперечной координатой $-1 \leq \xi^3 \leq 1$. В рамках изопараметрических аппроксимаций справедливо:

$$\mathbf{R}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_t \{ \mathbf{R}_{(t)} + \xi^3 \mathbf{N}_{(t)} \} H_{(t)}(\xi^1, \xi^2), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_t \{ \mathbf{r}_{(t)} + \xi^3 \mathbf{n}_{(t)} \} H_{(t)}(\xi^1, \xi^2), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_t \{ \dot{\mathbf{r}}_{(t)} + \xi^3 \dot{\mathbf{n}}_{(t)} \} H_{(t)}(\xi^1, \xi^2), \quad (3.3)$$

где $H_{(t)}(\xi^1, \xi^2)$ – функции формы, определяющие аппроксимации по поверхностным координатам; $\mathbf{R}_{(t)}, \mathbf{N}_{(t)}$ – узловые значения радиуса-вектора срединной поверхности и вектора, соединяющего соответствующие узлы на лицевых поверхностях; $\mathbf{r}_{(t)}, \mathbf{n}_{(t)}$ – неизвестные узловые значения аналогичных векторов в актуальной конфигурации. На практике обычно неизвестными являются приращения величин, определяющих геометрию. Это глобальные векторы перемещений и поворотов. При теоретических построениях обычно используется формулировка в скоростях. На практике скорости отождествляются с приращениями, то есть

$$\dot{\mathbf{r}}_{(t)} \approx \Delta^k \mathbf{r}_{(t)} = {}^{k+1} \mathbf{r}_{(t)} - {}^k \mathbf{r}_{(t)}, \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{n}}_{(t)} \approx \Delta^k \mathbf{n}_{(t)} = {}^{k+1} \mathbf{n}_{(t)} - {}^k \mathbf{n}_{(t)}. \quad (3.5)$$

Во втором соотношении есть особенность, связанная с сохранением длины вектора $\mathbf{n}_{(t)}$ по мере накопления вычисляемых приращений. Известны различные способы, но это тема отдельной публикации.

В рамках методики расчета, основанной на использовании левого тензора Пиолы (меры Альманси), необходимые кинематические соотношения для реализации

предлагаемого подхода приведены в [1]. Однако будет полезно кратко изложить некоторые соотношения в немного измененной форме.

Итак, пусть $\xi_{(m)}^j$ – координаты квадратурных точек. Базисные векторы актуальной конфигурации для k -го состояния в этих точках будут определяться в виде проекций

$$\begin{aligned} {}^k \mathbf{r}_\alpha^{(m)} &= \sum_t \{ {}^k \mathbf{r}_{(t)} + \xi_{(m)}^3 {}^k \mathbf{n}_{(t)} \} \frac{\partial H_{(t)}(\xi_{(m)}^1, \xi_{(m)}^2)}{\partial \xi^\alpha} = {}^k x_\alpha^{i,(m)} \mathbf{e}_i, \quad \alpha = 1, 2, \\ {}^k \mathbf{r}_3^{(m)} &= \sum_t {}^k \mathbf{n}_{(t)} H_{(t)}(\xi_{(m)}^1, \xi_{(m)}^2) = {}^k x_3^{i,(m)} \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Компоненты метрического тензора определяются суммой

$${}^k g_{ij}^{(m)} = {}^k \mathbf{r}_i^{(m)} \cdot {}^k \mathbf{r}_j^{(m)} = \sum_r {}^k x_i^{r,(m)} {}^k x_j^{r,(m)}. \quad (3.7)$$

Соответствующим образом определяются сопряженный базис и контравариантные компоненты метрического тензора.

При вычислении пространственного градиента скорости перейдем от физических скоростей к их приращениям и получим тензор, называемый тензором пространственного градиента перемещений. Итак, определим

$$\Delta^k \mathbf{r}_\alpha = \sum_t \{ \Delta^k \mathbf{r}_{(t)} + \xi^3 \Delta^k \mathbf{n}_{(t)} \} \frac{\partial H_{(t)}}{\partial \xi^\alpha}, \quad \Delta^k \mathbf{r}_3 = \sum_t \Delta^k \mathbf{n}_{(t)} H_{(t)} \quad (3.8)$$

и запишем эти выражения покомпонентно в структурном виде:

$$\Delta^k x_j^{j,(m)} = \sum_t \{ \Delta^k x_{(t)}^j \mathbf{P}_{j,(t)}^{(m)} + \Delta^k n_{(t)}^j \Phi_{j,(t)}^{(m)} \}. \quad (3.9)$$

Здесь нижний индекс означает производную по соответствующей локальной координате, верхний индекс слева – номер шага нагружения, верхний справа – номер проекции в неподвижной системе отсчета, верхний индекс в скобках – номер квадратурной точки.

Определим тензор пространственного градиента перемещений. С учетом обозначений (3.6) и (3.9) получим

$$\begin{aligned} (\Delta^k \mathbf{h}_r^{(m)}) &= (\Delta^k \mathbf{r}_j \cdot {}^k \mathbf{r}^j) = \sum_{i,j} \Delta^k h_{i,j}^{(m)} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = \\ &= \sum_{i,j} \left[\sum_t \left\{ \Delta^k x_{(t)}^i \sum_l \mathbf{P}_{l,(t)}^{(m)} {}^k x_{(m)}^{l,j} + \Delta^k n_{(t)}^i \sum_l \Phi_{l,(t)}^{(m)} {}^k x_{(m)}^{l,j} \right\} \right] (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j). \end{aligned} \quad (3.10)$$

В рамках принятых обозначений можно выписать выражение компонент \dot{g}_{ij} , определяющих ряд тензоров, описывающих течение среды в физических скоростях. Здесь приведем аналогичное выражение в приращениях для Δg_{ij} :

$$\begin{aligned} (\Delta^k g_{nl}^{(m)}) &= \sum_{i,t} \{ \Delta^k x_{(t)}^i [{}^k x_n^{i,(m)} \mathbf{P}_{l,(t)}^{(m)} + {}^k x_l^{i,(m)} \mathbf{P}_{n,(t)}^{(m)}] + \\ &+ \Delta^k n_{(t)}^i [{}^k x_n^{i,(m)} \Phi_{l,(t)}^{(m)} + {}^k x_l^{i,(m)} \Phi_{n,(t)}^{(m)}] \}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Теперь необходимо обсудить вопрос об аппроксимации метрического тензора нагруженного состояния \hat{g}_{ij}^k , который постоянно перевычисляется. С одной стороны,

он имеет характер матрицы третьего порядка и в каждой квадратурной точке может быть вычислен изолированно от остальных. В рамках такой трактовки речь идет о базе данных, размерность которой определяется общим количеством квадратурных точек глобальной задачи. В некоторых задачах зоны пластических деформаций имеют явно локальный характер, и в этом случае возможно вводить соответствующие массивы для значений ${}^k \hat{g}_{ij}$ либо в известных зонах, либо «по мере необходимости».

Второй вариант определения компонент метрики разгруженного состояния предполагает введение для нее некой глобальной аппроксимации. Это может быть трехмерная аппроксимация самих значений ${}^k \hat{g}_{ij}$, а можно вводить глобальную трехмерную аппроксимацию разгруженного состояния типа (3.1), (3.2). Последний вариант вступает в противоречие с тем обстоятельством, что такого глобального разгруженного состояния физически нет. Оно определяется мысленно для каждого элементарного объема, находящегося в однородном напряженном состоянии.

Для однородного изотропного материала чаще всего приводится выражение упругого потенциала (свободной энергии) в терминах инвариантов тензоров Пиолы – Кирхгофа, которые, как известно, равны между собой. В частности, такой функционал в общем случае имеет вид

$$\Psi = \Psi(I_{1,C_e}, I_{2,C_e}, I_{3,C_e}) = \Psi(I_{1,B_e}, I_{2,B_e}, I_{3,B_e}), \quad (3.12)$$

где [22]

$$\begin{aligned} I_{1,B_e} &= (\mathbf{g}) \cdot (\mathbf{B}_e), & I_{2,B_e} &= \frac{1}{2} [I_{1,B_e}^2 - I_{1,B_e^2}], \\ I_{3,B_e} &= \frac{1}{3} [I_{1,B_e^3} - I_{1,B_e}^3 + 3I_{1,B_e} I_{2,B_e}]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В этом случае удобно использовать соотношение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial I_{K,B_e^{-1}}} = \sum_{M,N} \frac{\partial \Psi}{\partial I_{M,B_e}} \frac{\partial I_{M,B_e}}{\partial I_{N,B_e^{-1}}}. \quad (3.14)$$

Здесь M, N, K – номера инвариантов, а далее указывается вид тензора. Соотношения между инвариантом тензора и инвариантом обратного тензора хорошо известны [22]:

$$I_{1,B_e} = \frac{I_{2,B_e^{-1}}}{I_{3,B_e^{-1}}}, \quad I_{2,B_e} = \frac{I_{1,B_e^{-1}}}{I_{3,B_e^{-1}}}, \quad I_{3,B_e} = \frac{1}{I_{3,B_e^{-1}}}. \quad (3.15)$$

Формулы дифференцирования инвариантов по соответствующим тензорам имеют вид:

$$\left(\frac{\partial I_{1,B_e^{-1}}}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) = (\mathbf{g}), \quad \left(\frac{\partial I_{2,B_e^{-1}}}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) = (\mathbf{g}) I_{1,B_e^{-1}} - (\mathbf{B}_e^{-1}), \quad \left(\frac{\partial I_{3,B_e^{-1}}}{\partial \mathbf{B}_e^{-1}} \right) = I_{3,B_e^{-1}} (\mathbf{B}_e). \quad (3.16)$$

Особенностью представленной постановки является наличие в качестве основной пластической характеристики ковариантных компонент тензора третьего ранга \hat{g}_{ki} . Именно относительно него сформулирован закон пластического течения. На этапе первоначального упругого деформирования справедливо совпадение этого тензора с метрическим тензором исходной конфигурации. Далее, по мере развития

пластического деформирования, их значения начинают различаться. При достижении пластического шарнира компоненты этого тензора совпадут с метрическим тензором актуальной конфигурации. Таким образом, открывается возможность локального анализа развития пластических деформаций по толщине оболочки по мере ее деформирования. Глубина (по толщине) пластического деформирования определяется сопоставлением коэффициентов G_{ij} , \hat{g}_{ij} , g_{ij} . А если принять во внимание, что эти величины определяются в каждой квадратурной точке каждого КЭ, то фактически получается полная картина упругопластического деформирования во всей области.

Заключение

Изложенные в настоящей работе результаты являются теоретической основой построения эффективных трехмерных КЭ пластин и оболочек, допускающих большие упругопластические деформации. Для детализации модели необходимо определить выражение упругой энергии и уравнение предельного состояния. При этом наличие упрочнения (изотропного или анизотропного) потребует введения специальных параметров, некоторые из них могут иметь тензорный характер. Естественно, эти усложнения потребуют дополнительных усилий для разрешения появившихся проблем. В статьях [6–20] приведены рекомендации по решению такого рода задач, а богатейший список ссылок на научные публикации поможет найти выход из проблемных ситуаций. В частности, необходимо определиться с формой представления векторов $\Delta^k \mathbf{n}_{(t)}$, построить линеаризованный оператор физических соотношений, вывести глобальные вариационные уравнения, линеаризованные относительно приращений неизвестных величин, составить программы, выбрать тестовые задачи и провести отладку всего комплекса теоретических положений и программных реализаций. Только после всех этих шагов можно судить об эффективности предлагаемой методики.

Литература

1. Голованов, А.И. Кинематика конечных деформаций трехмерных изопараметрических конечных элементов оболочек / А.И. Голованов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – Вып. 70. – 2008. – С. 109–122.
2. Голованов, А.И. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред / А.И. Голованов, Л.У. Султанов. – Казань: КГУ, 2009. – 465 с.
3. Работягов, Д.Д. Механика материалов при больших деформациях / Д.Д. Работягов. – Кишинев: Штиинца, 1975. – 168 с.
4. Поздеев, А.А. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритм, приложения / А.А. Поздеев, П.В. Трусов, Ю.И. Няшин. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
5. Коробейников, С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел / С.Н. Коробейников. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
6. Le, K.C. Constitutive equations for elastoplastic bodies at finite strain: thermodynamic implementation / K.C. Le, H. Stumpf // Acta Mech. – 1993. – V. 100. – P. 155–170.
7. Hackenberg, H.P. A general theory of finite inelastic deformation of metals based on the concept of unified constitutive models / H.P. Hackenberg, F.G. Kollmann // Acta Mech. – 1995. – V. 110. – P. 217–239.
8. Miehe, C. A theory of large-strain isotropic thermoplasticity based on metric transformation tensor / C. Miehe. // Arch. Appl. Mech. – 1995. – V. 66. – P. 45–64.
9. Sansour, C. On theory and numerics of large viscoplastic deformation / C. Sansour, F.G. Kollmann // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1997. – V. 146. – P. 351–369.
10. Miehe, C. A constitutive frame of elastoplasticity at large strains based on the notion of a plastic metric / C. Miehe // Int. J. Solids Structures. – 1998. – V. 35. – P. 3859–3897.

11. Brunig, M. Large strain elastic-plastic theory and nonlinear finite element analysis based on metric transformation tensor / M. Brunig // *Comput. Mech.* – 1999. – V. 24. – P. 187–196.
12. Steinmann, P. On spatial and material setting of thermo-hyperelastodynamics / P. Steinmann // *J. Elasticity.* – 2002. – V. 66. – P. 109–157.
13. Schutte, H. On a geometrically nonlinear damage model based on multiplicative decomposition of the deformation gradient and the propagation of microcracks / H. Schutte, O.T. Bruhns // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2002. – V. 50. – P. 827–853.
14. Menzel, A. On the spatial formulation of anisotropic multiplicative elasto-plasticity / A. Menzel, P. Steinmann // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 2003. – V. 192. – P. 3431–3470.
15. Lu, J. A covariant formulation of anisotropic finite plasticity: theoretical developments / J. Lu, P. Papadopoulos // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 2004. – V. 193. – P. 5339–5358.
16. Lu, J. A covariance condition in finite plasticity and related constitutive results / J. Lu // *ZAMP.* – 2006. – V. 57. – P. 313–323.
17. An, Q. A general theory of finite deformation of viscoplastic thin shells / Q. An, F.G. Kollmann // *Acta Mech.* – 1996. – V. 117. – P. 47–70.
18. Sansour, C. Large viscoplastic deformations of shells. Theory and finite element formulation / C. Sansour, F.G. Kollmann // *Comput. Mech.* – 1998. – V. 21. – P. 512–525.
19. Basar, Y. Large inelastic strain analysis by multilayer shell elements / Y. Basar, A. Eckstein // *Acta Mech.* – 2000. – V. 141. – P. 225–252.
20. Har, J. A unified stress update algorithm for explicit transient shell dynamics with combined isotropic-kinematic hardening in Eulerian rate-type phenomenological finite elasto-plasticity models / J. Har // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 2007. – V. 196. – P. 3248–3275.
21. Голованов, А.И. Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций / А.И. Голованов, А.В. Песошин, О.Н. Тюленева. – Казань: КГУ, 2005. – 442 с.
22. Голованов, А.И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А.И. Голованов, О.Н. Тюленева, А.Ф. Шигабутдинов. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
23. Simo, J.S. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation / J.S. Simo // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1988. – V. 66. – P. 199–219.
24. Пальмов, И.А. Колебания упруго-пластических тел / И.А. Пальмов. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
25. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

[04.05.2010]

MODELING OF THE LARGE ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS OF SHELLS. THEORETICAL BASIS OF FINITE-ELEMENT MODELS

A.I. Golovanov

The present article presents theoretical basis for modeling large deformations of shells using isoparametric finite element approximations. A physical model of an elastoplastic material is based on multiplicative decomposition of the deformation gradient into elastic and plastic components. The deformation process is described in curvilinear coordinates using Lagrange description. Constitutive equations and the law of plastic flow are obtained from thermodynamic equations for Almansi tensor and Kirchhoff tensor. The tensor equations are reduced to a scalar form which includes free energy gradients, gradients of the equation of ultimate state and a special tensor characterizing the plastic deformation level. An explicit and implicit integration schemes for the equation of plastic flow are discussed. The issues of applying the constructed relations to analyzing shells are tackled. Initially, the use of the stepped loading method (integration in time) is discussed, hence some relations for incrementing the basic vector and tensor values are presented.

Key words: shells, large elastoplastic deformations, finite elements, isoparametric approximation, stepped loading method.