УДК 539.3

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ[*)]

А.А. Белов, А.Н. Васильев, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук

НИИМ Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

Обсуждаются вопросы гранично-элементного решения интегральных уравнений на одиночной плоской волне, построенных для решения краевых задач трехмерной динамической теории упругости. Используется интервальная математика – двусторонние методы численного решения. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: граничный элемент, неклассические граничные интегральные уравнения, трехмерная динамическая теория упругости, достоверность вычислений.

Введение

Статья посвящена разработке гранично-элементной схемы решения. Развивается подход, являющийся альтернативой формулам граничных интегральных уравнений (ГИУ) на основе двойного применения теоремы взаимности, восходящий к работе Д. Нардини и К.А. Бреббия [1]. Неоспоримым достоинством подхода является отсутствие неустранимой ошибки численного моделирования, возникающей в подходе Нардини–Бреббия, что является следствием использования точных ГИУ, эквивалентных исходной дифференциальной постановке.

1. Постановка задачи и метод решения

Уравнения движения упругодеформируемой среды и краевые условия имеют вид:

$$Lu = 0, \quad L = \sigma_{ij,j} - \partial_t^2, \;\; (l^0 u)_i \equiv u_i\Big|_{\partial\Omega}, \;\; (l^1 u)_i \equiv \sigma_{ij}(u) n_j\Big|_{\partial\Omega} \equiv c_{ijkl} n_j u_{l,k},$$

где $\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{kl}$, σ – тензор напряжений; u – вектор смещений; c_{ijkl} – модули упругости ($i, j, k, l = 1, 2, 3$).

Тензор Грина для линейной анизотропной теории упругости можно найти в [2]:

$$U(x,\omega) = -c\Delta \int_{S^2} \overline{u}\, dS(n) = -c\Delta \int_{S^2} G(nx,\omega,n) F^{(0)} dS(n),$$

*) Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3367.2008.8).

$$G(\xi)=\sum_{\alpha=1}^{3} e^{ik_\alpha|\xi|}\frac{1}{2ik_\alpha\lambda_\alpha}A_\alpha(\operatorname{sgn}\xi)\otimes A_\alpha(\operatorname{sgn}\xi),\quad \xi=nx,$$

$$U(x,t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}U(x,\omega)e^{-i\omega t}d\omega,\quad \lambda_\alpha=\frac{1}{2}A_\alpha(\upsilon_\alpha^2M+K)A_\alpha,\quad \upsilon_\alpha=\omega/k_\alpha,$$

где $K=L_0(n)$, $M=\rho I$, $F^{(0)}=1$, $g_S=\overline{u}$, ρ – плотность, I – единичная матрица.

Для динамических задач справедливы следующие уравнения [3]:

$$\gamma\hat{A}_\alpha\otimes\hat{A}_\alpha\int_\Gamma[l^1e^{ik_\alpha n(x-y)}l^0\psi(y)-e^{ik_\alpha n(x-y)}l^1\psi(y)]d_y\Gamma=0, \tag{1}$$

$$\gamma\hat{A}_\alpha\otimes\hat{A}_\alpha\int_\Gamma[l^1\delta(\tau)*l^0\psi(y,t)-\delta(\tau)*l^1\psi(y,t)]d_y\Gamma=0, \tag{2}$$

$$\det A(k_\alpha)=0,\quad A(k,\omega,n)\hat{A}=0,\quad A^*(k_\alpha\operatorname{sgn}\xi)=\operatorname{tr}A^*(k_\alpha)\hat{A}_\alpha(\operatorname{sgn}\xi)\otimes\hat{A}_\alpha(\operatorname{sgn}\xi),$$

$$\tau=t-\frac{n(x-y)}{\upsilon_\alpha},$$

$$\pm\gamma c\sum_{\alpha=1}^{3}ig_S(k_\alpha)\int_\Gamma[l^1e^{ik_\alpha n(x-y)}l^0\psi(y)-e^{ik_\alpha n(x-y)}l^1\psi(y)]d_y\Gamma=0, \tag{3}$$

$$\pm\gamma c\sum_{\alpha=1}^{3}ig_S(k_\alpha)\int_\Gamma[l^1\delta(\tau)*\psi(y,t)-\delta(\tau)*l^1\psi(y,t)]d_y\Gamma=0. \tag{4}$$

Таким образом, решение задачи методом ГИУ означает, что выполняются соответствующие соотношения из (1)–(4) для собственных чисел k_α и собственных векторов $\hat{A}_\alpha$. Для теории упругости из уравнений (1) с учетом соотношения

$$\frac{iA^*(k_\alpha\operatorname{sgn}\xi)}{[\det A(k)]'\big|_{k=k_\alpha}}=\frac{1}{2ik_\alpha\lambda_\alpha}A_\alpha(\operatorname{sgn}\xi)\otimes A_\alpha(\operatorname{sgn}\xi)$$

выделяется интегральное уравнение, совпадающее (при $x=0$) с уравнением из [4, 5].

В работе [4] В.А. Бабешко предложил метод построения новых интегральных уравнений для решения краевых задач. В дальнейшем этот подход был применен А.О. Ватульяном [5]. Соответствующие уравнения для изотропного случая выглядят следующим образом [6]:

$$\int_S U(x,n)e_u^1(x)\,dS+\int_S T(x,n)e_u^0(x)\,dS=0, \tag{5}$$

$$T=\mu is\cdot\begin{Vmatrix}Am_1+Bn_1 & Am_2+Bn_2 & Am_3+Bn_3\\ Dn_1-Bn_3 & Dn_2 & Bn_1+Dn_3\\ Cn_1 & Bn_3+Cn_2 & Cn_3-Bn_2\end{Vmatrix},$$

$$U=\mathrm{e}\cdot\begin{Vmatrix}n_1 & n_2 & n_3\\ n_3 & 0 & -n_1\\ 0 & -n_3 & n_2\end{Vmatrix},$$

$$s=\mathrm{diag}(-2k_1e_1,k_2e_2,k_2e_2),\quad \mathrm{e}=\mathrm{diag}(e_1,e_2,e_2),\quad e_j=\exp[ik_jnx],$$

$$A=\frac{\nu}{1-2\nu},\quad B=mn,\quad C=n\times i_1m,\quad D=n\times i_2m.$$

На базе уравнений (1), (2) можно построить МГЭ-схему решения динамических краевых задач.

2. Численные исследования

Первый численный результат на основе уравнения (5) был получен в [6] для задачи об установившихся крутильных колебаниях изотропного упругого цилиндрического тела. Следующие численные результаты для трехмерного случая упругой динамики получены в [7]. Применение достоверных вычислений на этапе формирования из дискретного аналога разрешающей системы линейных алгебраических уравнений позволяет построить модифицированную гранично-элементную методику. Поиск решения системы на основе достоверных вычислений открывает новые возможности для МГЭ.

Для демонстрации возможностей применения достоверных вычислений при решении систем линейных алгебраических уравнений рассмотрим следующий пример. В качестве входных данных рассмотрим систему Бутройда–Деккера. Элементы матрицы A определяются формулой:

$$a_{ij}=\binom{n+i-1}{i-1}\cdot\binom{n-1}{n-j}\cdot\frac{n}{i+j-1},\quad i,j=1,...,n.$$

Если правая часть b равна (1, 2, ..., n), то точное решение системы равно (0, 1, –2, ..., $(-1)^n(n-1)$). При значении n, равном 6, получим следующую матрицу системы:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
6	15	20	15	6	1
21	70	105	84	35	6
56	210	336	280	120	21
126	504	840	720	315	56
252	1050	1800	1575	700	126
462	1980	3465	3080	1386	252

и ее правую часть: (1, 2, 3, 4, 5, 6).

Приближение в виде числа с плавающей точкой:

x_1 = 0,00000000000024158453; x_2 = 0,99999999999761302050;
x_3 = –1,99999999998962341152; x_4 = 2,99999999996864596952;
x_5 = –3,99999999992343013844; x_6 = 4,99999999983769072287.

Верификационный интервал:

$\tilde{x}_1$ = [–0,00000115795675270647, 0,00000115795781852057];
$\tilde{x}_2$ = [0,99999900660054330537, 1,00000099339171977242];
$\tilde{x}_3$ = [–2,00000047928895474669, –1,99999952068153818985];
$\tilde{x}_4$ = [2,99999973438622369315, 3,00000026553113086081];

$$\tilde{x}_5 = [-4{,}00000123681682762111, \quad -3{,}99999876299123702239];$$
$$\tilde{x}_6 = [4{,}99999305126426829560, \quad 5{,}00000694834331316230];$$

Невязки:

$$\Delta_1 = 0{,}0000000000001776357; \quad \Delta_2 = 0{,}0000000000012789769;$$
$$\Delta_3 = 0{,}0000000000039790393; \quad \Delta_4 = 0{,}0000000000096633812;$$
$$\Delta_5 = 0{,}0000000000238742359; \quad \Delta_6 = 0{,}0000000000568434189.$$

Рассмотрены две задачи: о действии нестационарного давления на поверхности шара единичного радиуса и куба с единичной длиной ребра. Приведенные параметры Ламе и плотность материала: $\lambda = 6$, $\mu = 3$, $\rho = 7$.

В момент времени $t = 0$ к границе шара прикладывается равномерно распределенное нормальное давление интенсивности $p(t)$.

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1; \\ 1, & t \ge 1. \end{cases}$$

Поверхности шара и куба разбиваются на 216 биквадратичных элемента, перемещения ищутся для всех угловых точек элементов конструкций, с учетом симметрии можно выделить 27 элементов, находящихся в положительной области декартовой системы координат. Обе задачи для классических ядер решались с учетом симметрии, а для модифицированных ядер решения искались по всей сетке. Гранично-элементная сетка на сфере строилась путем проекции равномерной сетки куба на сферу.

Численная МГЭ-схема для классических ядер описана в [8]. Вариант численной МГЭ-схемы, использованной для решения уравнения (5), построен на ее основе, однако есть два отличия: численное интегрирование по Гауссу организовано на основе формулы с фиксированным порядком и адаптивный алгоритм не применялся; для решения итоговой системы линейных алгебраических уравнений использовался алгоритм регуляризации по Тихонову.

На рис. 1 изображен куб и отмечены точки, для которых представлены результаты расчетов. Сетка на кубе является регулярной.

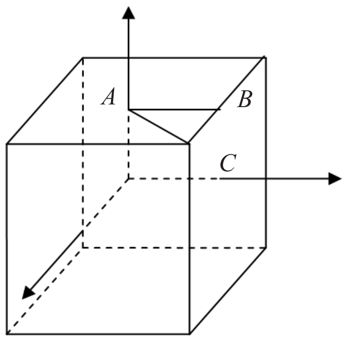

Рис. 1

Приведем результаты совместного использования МГЭ и алгоритма достоверных вычислений. На рис. 2 представлены перемещения поверхности шара. На рис. 3 представлены изменения по времени вектора перемещений в соответствующих точках куба.

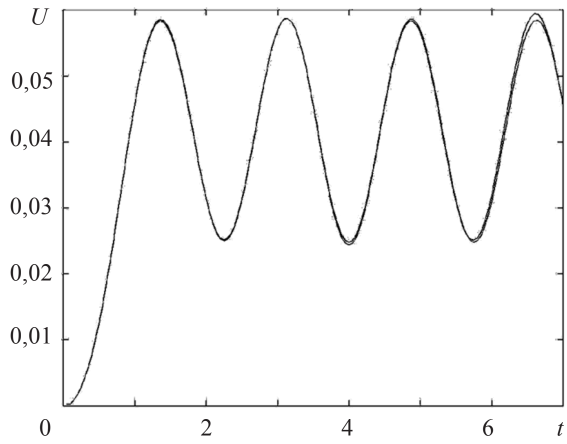

Рис. 2

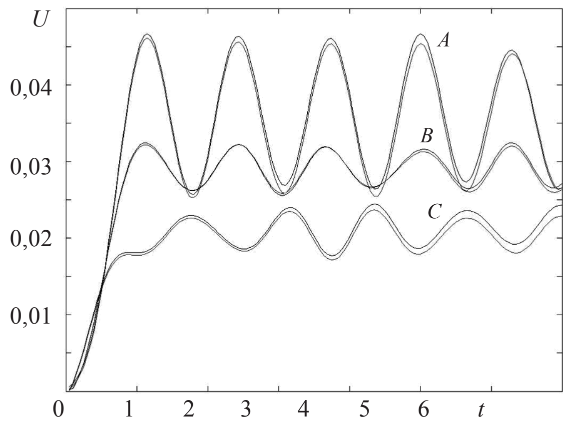

Рис. 3

Полученные результаты свидетельствуют о перспективности использования ГИУ на одиночной плоской волне в сочетании с двустороннимиметодами вычислений для решения трехмерных динамических задач теории упругости. Достигнутая точность расчетов не уступает точности МГЭ-схем для классических ГИУ.

Литература

1. *Бреббия*, *К.* Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

2. *Norris*, *A.N.* Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids / A.N. Norris // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1994. – №447. – P. 175–188.

3. *Игумнов*, *Л.А.* Граничные интегральные уравнения трехмерных задач на плоских волнах / Л.А. Игумнов // Докл. РАН. – 2006. – Т. 409, №5. – С. 1–3.

4. *Бабешко*, *В.А.* Новый метод решения краевых задач механики сплошной среды и математической физики для неклассических областей / В.А. Бабешко // ДАН СССР. – 1985. – Т. 284, №1. – С. 73–76.

5. *Ватульян*, А.О. О граничных интегральных уравнениях I-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости / А.О. Ватульян // Докл. РАН. – 1993. – Т. 333, №3. – С. 312–314.

6. *Ватульян*, *А.О.* Новый вариант граничных интегральных уравнений и их применение

к динамическим пространственным задачам теории упругости / А.О. Ватульян, В.М. Шамшин // ПММ. – 1998. – Т.62, вып. 3. – С. 492–496.

7. *Игумнов*, *Л.А*. Численное решение интегральных уравнений на одиночной плоской волне для начально-краевых задач трехмерной теории упругости конечных тел / Л.А. Игумнов, А.А. Белов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2006. – Вып. 68. – С. 22–26.

8. Гранично-элементная методика решения трехмерных нестационарных динамических задач теории упругости и вязкоупругости / Л.А.Игумнов [и др.] // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2005. – Вып. 67. – С. 91–101.

[12.10.2009]

A MODIFICATION OF THE METHODOLOGY OF NUMERICAL ANALYSIS OF REGULAR BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS OF 3-D DYNAMIC ELASTICITY

A.A. Belov, A.N. Vasilyev, L.A. Igumnov, Litvinchuk S.Yu.

Issues of the boundary-element analysis of integral equations on a single plane wave constructed for analyzing boundary-value problems of 3-D dynamic elasticity are discussed. Interval mathematics – double-sided methods of numerical solution – is used. The results of the numerical experiments are given.

Key words: boundary element, nonclassical boundary integral equations, 3-D dynamic elasticity, reliability of calculations.