УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ РАСЧЕТ ДИНАМИКИ ОДНОРОДНЫХ ПОРОУПРУГИХ ТЕЛ*)

А.В. Аменицкий

НИИМ Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

Представлены результаты расчетов динамического состояния конечных пороупругих тел на основе метода граничных элементов. На модельной задаче продемонстрированы возможности применения гранично-элементной методики при получении решения краевой динамической задачи пороупругости, имеющей аналитическое решение. Приведен пример численного исследования волн Рэлея на пороупругом полупространстве.

Ключевые слова: граничный элемент, трехмерная динамическая теория пороупругости, численное исследование, распространение пороупругих волн.

Введение

Исследование волновых процессов в пороупругих телах представляет научный и практический интерес. Для широкого диапазона насыщенных материалов упругая теория является грубым приближением при исследовании распространения волн. Для учета пористости широко используется теория М. Био [1, 2].

Вопросами распространения волн в пористых насыщенных средах в последние годы занимались Н.С. Городецкая (1998), Н. Дунин, Д. Михайлов, В. Николаевский (2002), R. Ababou и др. (2002), D.F. Aldridg и др. (2005), J. Jocker и D. Smenlders (2005), G. Chao и др. (2005), H.F. Wang (2000) и многие другие.

В статье используются модифицированные интегральные представления волновых полей в пороупругих средах, полученные ранее M. Schanz [3]. На основе новых граничных интегральных уравнений (ГИУ) пороупругости получены численные гранично-элементные (ГЭ) решения прямых трехмерных динамических задач.

1. Гранично-элементное моделирование

Детали редукции исходной начально-краевой задачи трехмерной теории пороупругости к эквивалентной системе разрешающих ГИУ можно найти в [4, 5].

Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматриваем регуляризованные уравнения:

$$\alpha_\Omega \tilde{\upsilon}_k(x,s) + \\ + \int_\Gamma (\tilde{T}_{ik}(x,y,s)\tilde{\upsilon}_i(y,s) - \tilde{T}^0_{ik}(x,y,s)\tilde{\upsilon}_i(x,s) - \tilde{G}_{ik}(x,y,s)\tilde{t}_i(y,s))\, d\Gamma = 0, \qquad (1)$$

*) Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3367.2008.8).

$$\alpha_\Omega \tilde{\upsilon}_k(x,t)+$$

$$+\int_0^t\int_\Gamma \left(\tilde{T}_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{\upsilon}_i(y,\tau)-\tilde{T}^0_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{\upsilon}_i(x,\tau)-\tilde{G}_{ik}(x,y,t-\tau)\tilde{t}_i(y,\tau)\right)d\Gamma d\tau=0,$$

$$x\in\Gamma,\quad \tilde{t}=[t_1,t_2,t_3,q]^{\mathrm{T}},\quad \tilde{\upsilon}=\{u_1,u_2,u_3,q\},\quad s=\alpha+i\omega, \tag{2}$$

где u, t – перемещения и силы; p, q – давление и поток; $\tilde{G}$, $\tilde{T}$ – матрицы фундаментальных и сингулярных решений, а $\tilde{T}^0$ – особенности сингулярных решений.

Для численного обращения решения ГИУ (1) использован алгоритм, предложенный Дурбином:

$$F_k=\operatorname{Re}[\overline{f}(\alpha+i\omega_k)],\quad G_k=\operatorname{Im}[\overline{f}(\alpha+i\omega_k)],\quad \Delta_k=\omega_{k+1}-\omega_k,$$

$$f(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(F_k+F_{k+1})\Delta_k}{2\pi},$$

$$f(t)\approx\frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{F_{k+1}-F_k}{\Delta_k}\left(\cos(\omega_{k+1}t)-\cos(\omega_k t)\right)-\frac{G_{k+1}-G_k}{\Delta_k}\left(\sin(\omega_{k+1}t)-\sin(\omega_k t)\right)\right].$$

Для решения ГИУ (2) применен метод квадратур сверток:

$$y(t)=\int_0^t q(t-\tau)g(\tau)d\tau,\quad y(n\Delta t)=\sum_{k=0}^{n}\omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t),\ n=0,1,\dots,N,$$

$$\omega_n(\Delta t)=\frac{\Re^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\overline{q}\left(\gamma(\Re e^{il2\pi L^{-1}})/\Delta t\right)e^{-inl2\pi L^{-1}},$$

$$\gamma(z)=\frac{3}{2}-2z+\frac{z^2}{2},\quad x(t,p)=\int_0^t e^{p(t-\tau)}g(\tau)d\tau.$$

2. Численные результаты

Рассмотрена задача, изображенная на рис. 1, со следующими параметрами материала: $K = 8\cdot10^9$ Н/м^2; $G = 6\cdot10^9$ Н/м^2; $R = 4{,}7\cdot10^8$ Н/м^2; $k = 1{,}9\cdot10^{-10}$ м^4/(Н·с); $\rho = 2458$ кг/м^3; $\rho_f = 1000$ кг/м^3; $\phi = 0{,}19$; $\alpha = 0{,}867$.

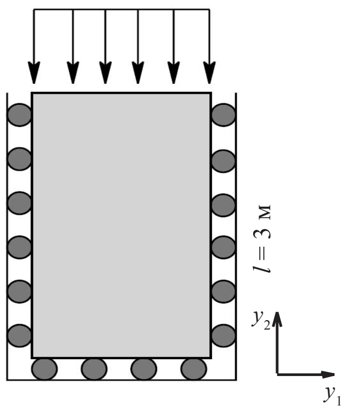

Рис. 1

Нагрузка, действующая на тело, $t_2 = -1$ Н/м^2. Граничные условия в области Лапласа имеют вид: $\tilde{u}_2(y_2 = 0) = 0$, $\tilde{q}_2(y_2 = 0) = 0$, $\tilde{\sigma}_2(y_2 = l) = -1/s$, $\tilde{p}(y_2 = l) = 0$.

Гранично-элементная сетка, изображенная на рис. 2, состоит из 504 элементов. Результаты расчетов перемещений и давлений при разных значениях шага по времени приведены на рис. 3, 4 соответственно.

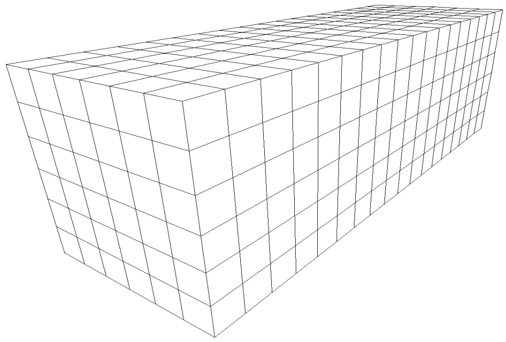

Рис. 2

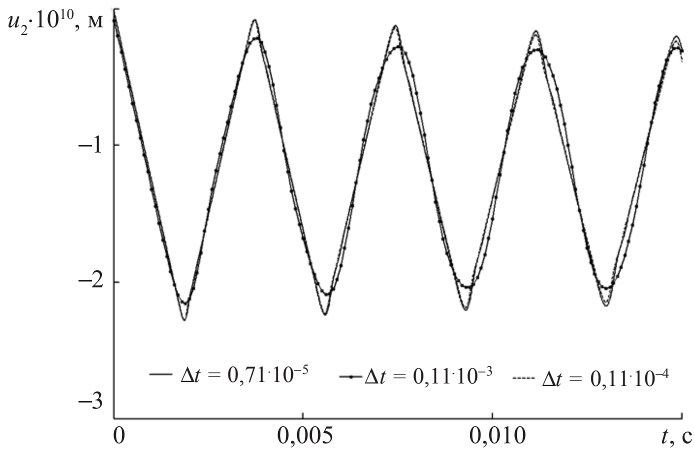

Рис. 3

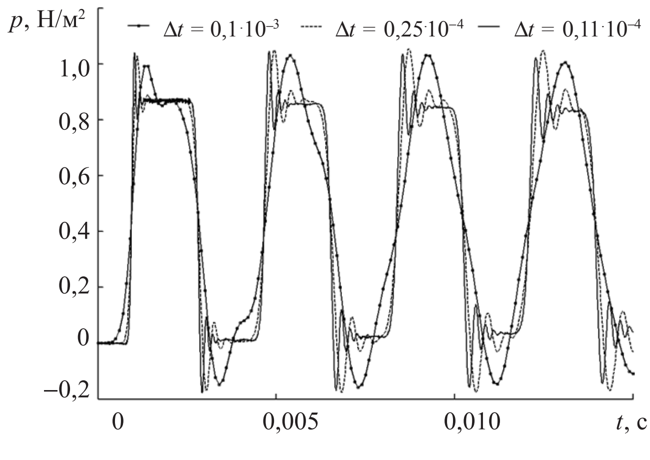

Рис. 4

На примере консоли большой длины ($l = 1000$ м) со следующими параметрами: $E = 2{,}544 \cdot 10^8$ Н/м^2; $k = 3{,}55 \cdot 10^{-9}$ м^4/(Н·с); $\nu = 0{,}298$; $R = 1{,}2 \cdot 10^9$ Н/м^2; $\rho = 1884$ кг/м^3; $\rho_f = 1000$ кг/м^3; $\phi = 0{,}48$; $\alpha = 0{,}98$, можно проследить влияние параметра проницаемости на отклик давления в бесконечной консоли на оси $y_2 = 995$ м (рис. 5).

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $t_3(t) = P_0 f(t)$, $P_0 = -1$ кН/м^2, $f(t) = H(\mathrm{t})$ на поверхность полупространства (рис. 6) со следующими параметрами материала: $E = 2{,}544 \cdot 10^8$ Н/м^2; $k = 3{,}55 \cdot 10^{-9}$ м^4/(Н·с); $\nu = 0{,}298$; $R = 1{,}2 \cdot 10^9$ Н/м^2; $\rho =$ $= 1884$ кг/м^3; $\rho_f = 1000$ кг/м^3; $\phi = 0{,}48$; $\alpha = 0{,}98$.   .

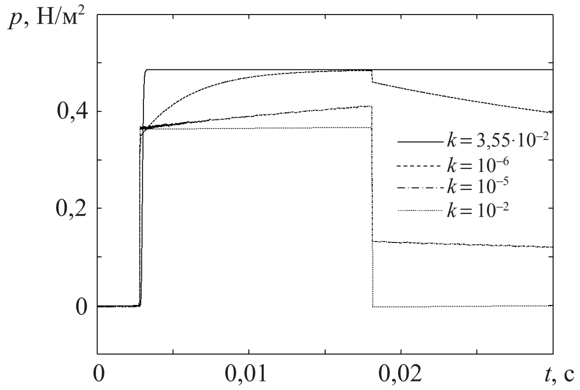

Рис. 5

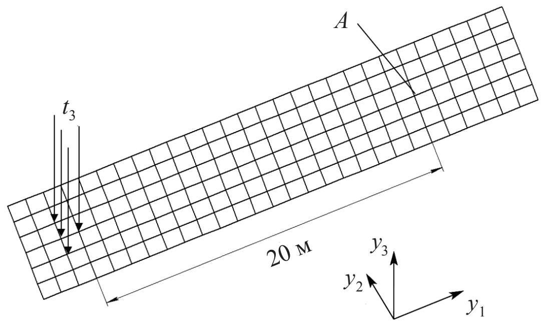

Рис. 6

На рис. 7, 8 приведены соответственно вертикальные и горизонтальные перемещения на расстоянии 20 м от области нагружения. Поверхность полупространства описывается регулярной ГЭ-сеткой, состоящей из 3088 элементов.

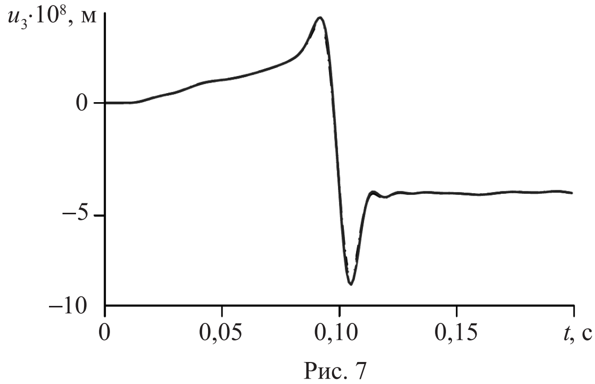

Рис. 7

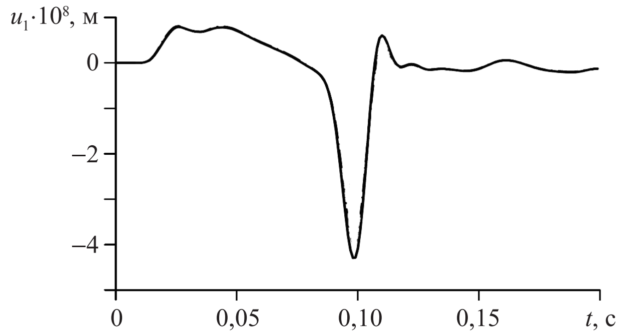

Рис. 8

Исследование влияния расстояния (соответственно 6, 12, 20 м) от места действия силы на форму и амплитуду отклика давления приведено на рис. 9. Тем самым, продемонстрирован вклад волн Рэлея в соответствующий отклик.

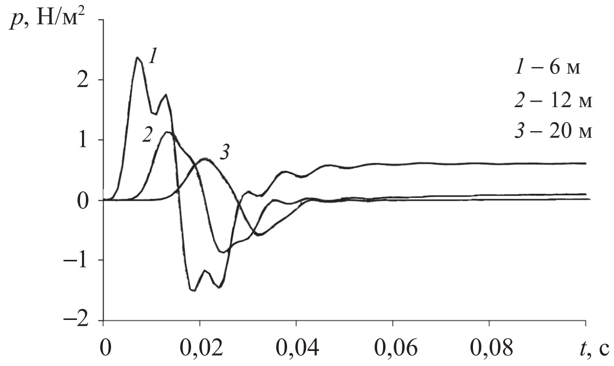

Рис. 9

Исследование влияния коэффициента проницаемости на отклик давлений на расстоянии 3 м при $P_0 = -1$ Н/м^2 приведено на рис. 10.

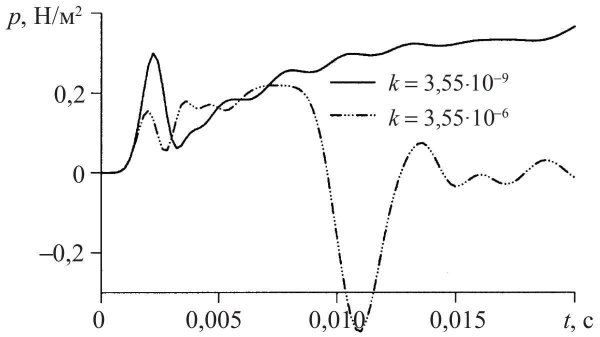

Рис. 10

На основе новых сингулярных ГИУ пороупругости численно получены гранично-элементные решения краевых динамических задач. На модельной задаче проведено исследование влияния шага по времени на результат гранично-элементной аппроксимации искомого отклика. Продемонстрирована высокая точность гранично-элементной расчетной схемы. Показано влияние коэффициента проницаемости среды на исследуемый отклик в пороупругом теле. Продемонстрирован вклад волны Рэлея в отклик перемещений и давлений на границе пороупругого полупространства.

Литература

1. *Biot*, *M*. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, № 2. – P. 168–178.
2. *Biot*, *M.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, № 2. – P. 179–191.
3. *Schanz*, *M.* Wave propogation in viscoelastic and poroelastic continua / M. Schanz. – Berlin: Springer, 2001. – 170 p.
4. *Аменицкий*, *А.В.* Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах / А.В. Аменицкий, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2008. – Вып. 70. – С. 71–78.
5. *Баженов*, *В.Г.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

[9.10.2009]

BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF HOMOGENEOUS POROUSELASTIC BODIES

A.V. Amenitsky

The results of the analysis of the dynamic state of finite porous-elastic bodies on the basis of the boundary element method are presented. A benchmark problem is used to demonstrate the potential of the boundary element methodology in obtaining a solution of a boundary-value dynamic problem having an analytical solution. The numerical study of Rayleigh waves in a porous-elastic half-space is given as an example.

Key words: boundary element, 3-*D* dynamic theory of porouselasticity, numerical study, propagation of porous-elastic waves.