УДК 539.3

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ ПОРОУПРУГОСТИ*)

А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин

НИИМ Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

Рассматривается модель пористой среды с двухфазной внутренней структурой, предложенная Био. Для решения краевых задач трехмерной динамической теории пороупругости построена новая система граничных интегральных уравнений. Для создания гранично-элементной методики разработан новый метод численного обращения преобразования Лапласа. Представлены численные эксперименты.

Ключевые слова: новые граничные интегральные уравнения, трехмерная динамическая теория пороупругости.

Введение

Дисперсные среды, в частности пористые материалы, широко распространены в природе и технике: например, к ним относятся насыщенные газом или жидкостью грунты и горные породы, строительные материалы (древесина, песок, кирпич и технические пены). Исследование волновых процессов в пороупругих телах и средах представляет значительный интерес. Существенным для волновой картины является наличие в пороупругой трехмерной среде трех видов волн. Началом активных исследований волновых процессов в насыщенных пористых средах послужила работа Я.И. Френкеля [1]. Теория М. Био [2, 3] опирается на те же соотношения между напряжениями и деформациями, что и в работе Я.И. Френкеля, но отличается большей общностью.

Большинство имеющихся работ по изучению колебаний в пористых средах опирается либо на метод нормальных мод, либо на лучевые методы. Вопросы, связанные с построением интегральных представлений решений в полной строгой математической постановке, являются актуальными. Несмотря на то, что в литературе представлены варианты сингулярных граничных интегральных уравнений (ГИУ) [4, 5], имеются лишь единичные гранично-элементные решения краевых динамических задач пороупругости.

1. Математическая модель пороупругой среды

Система дифференциальных уравнений в преобразованиях Лапласа (параметр s) для смещения $\tilde{u}_i$ и порового давления $\tilde{p}$ имеет следующий вид [4]:

*) Выполнено в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-3367.2008.8).

$$G\widetilde{u}_{i,jj}+\left(K+\frac{1}{3}G\right)\widetilde{u}_{j,ij}-(\alpha-\beta)\,\widetilde{p}_{,i}-s^2(\rho-\beta\rho_f)\,\widetilde{u}_i=-\widetilde{F}_i,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\widetilde{p}_{,ii}-\frac{\phi^2 s}{R}\widetilde{p}-(\alpha-\beta)s\,\widetilde{u}_{i,i}=-\widetilde{a},$$

$$\beta=\frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s+s^2k(\rho_a+\phi\rho_f)},$$

где G, K – константы упругости; ϕ – пористость, k – проницаемость, α – эффективный коэффициент напряжений; ρ, ρ_a, ρ_f – плотности пористого скелета, присоединенной массы и жидкой среды; $\widetilde{F}_i$, $\widetilde{a}$ – плотности источников.

Фундаментальное решение для этой системы построено в [4], однако при построении матриц сингулярных решений допущены ошибки, что, в свою очередь, привело к ошибочному интегральному представлению и ГИУ для порового давления.

2. Граничные интегральные уравнения

Интегральное представление прямого подхода имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix}\widetilde{u}_j\\ \widetilde{p}\end{bmatrix}=\int_\Gamma\begin{bmatrix}\widetilde{U}^s_{ij} & -\widetilde{P}^s_j\\ \widetilde{U}^f_i & -\widetilde{P}^f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{t}_i\\ \widetilde{q}\end{bmatrix}d\Gamma-\int_\Gamma\begin{bmatrix}\widetilde{T}^s_{ij} & -\widetilde{Q}^s_j\\ \widetilde{T}^f_i & -\widetilde{Q}^f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{u}_i\\ \widetilde{p}\end{bmatrix}d\Gamma.$$

Компоненты матриц – ядер интегрального представления – можно найти в [4]. Остановимся лишь на компонентах $\widetilde{T}^f_i$, при получении которых в [4] допущена ошибка.

Формула для построения $\widetilde{T}^f_i$ следующая:

$$\widetilde{T}^f_i=\left[\left(\left(K-\frac{2}{3}G\right)\widetilde{U}^f_{k,k}+\alpha s\widetilde{P}^f\right)\delta_{il}+G(\widetilde{U}^f_{i,l}+\widetilde{U}^f_{l,i})\right]n_l,$$

$$\widetilde{P}^s_j=\frac{\alpha r_{,i}}{4\pi rk(K+4G/3)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\left[\left(\lambda_1+\frac{1}{r}\right)e^{-\lambda_1 r}-\left(\lambda_2+\frac{1}{r}\right)e^{-\lambda_2 r}\right],$$

$$\widetilde{U}^f_i=\left(1-\frac{s\rho_f\kappa}{\alpha}\right)s\widetilde{P}^s_i,$$

$$\widetilde{P}^f=\frac{1}{4\pi rk(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}[(\lambda_1^2-\lambda_4^2)e^{-\lambda_1 r}-(\lambda_2^2-\lambda_4^2)e^{-\lambda_2 r}],$$

где

$$\lambda^2_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\phi^2 s^2\rho_f}{\beta R}+\frac{s^2(\rho-\beta\rho_f)}{K+4G/3}+\frac{s^2\rho_f(\alpha-\beta)^2}{\beta(K+4G/3)}\right]\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\phi^2 s^2\rho_f}{\beta R}+\frac{s^2(\rho-\beta\rho_f)}{K+4G/3}+\frac{s^2\rho_f(\alpha-\beta)^2}{\beta(K+4G/3)}\right)^2-4\frac{s^4\phi^2\rho_f(\rho-\beta\rho_f)}{\beta R(K+4G/3)}},$$

$$R_k=(3r_{,i}r_{,j}-\delta_{ij})/r^2+\lambda_k(3r_{,i}r_{,j}-\delta_{ij})/r+\lambda_k^2 r_{,i}r_{,j},$$

$$\lambda_4^2 = \frac{s^2\rho}{K + 4G/3}.$$

Зная $\widetilde{P}^f$, запишем следующие выражения:

$$\delta_{il} n_l \alpha s \widetilde{P}^f = \alpha s \frac{s\rho_f}{4\pi r \beta(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[(\lambda_1^2 - \lambda_4^2) e^{-\lambda_1 r} (\lambda_2^2 - \lambda_4^2) e^{-\lambda_2 r} \right] \delta_{il} n_l .$$

Зная $\widetilde{U}^f$, найдем производную по x_j:

$$\widetilde{U}_{k,j}^f = s \frac{(\alpha-\beta) s\rho_f}{4\pi\beta(K+4G/3)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)} \left[\lambda_1 \left(\frac{r,_k}{r} e^{-\lambda_1 r} \right),_j + \left(\frac{r,_k}{r^2} e^{-\lambda_1 r} \right),_j - \lambda_2 \left(\frac{r,_k}{r} e^{-\lambda_2 r} \right),_j - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{r,_k e^{-\lambda_2 r}}{r^2} \right),_j \right] = s \frac{(\alpha-\beta) s\rho_f}{4\pi\beta(K+4G/3)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)} \left[\lambda_1 \left(\frac{x_k}{r^2} e^{-\lambda_1 r} \right),_j + \left(\frac{x_k}{r^3} e^{-\lambda_1 r} \right),_j - \right.$$

$$\left. - \lambda_2 \left(\frac{x_k}{r^2} e^{-\lambda_2 r} \right),_j - \left(\frac{x_k e^{-\lambda_2 r}}{r^3} \right),_j \right] = s \frac{(\alpha-\beta) s\rho_f}{4\pi\beta(K+4G/3)(\lambda_1^2-\lambda_2^2)} \left[\lambda_1 \delta_{kj} \frac{e^{-\lambda_1 r}}{r^2} + \right. \qquad (1)$$

$$+ \lambda_1 x_k \left(\frac{e^{-\lambda_1 r}}{r^2} \right),_j + \delta_{kj} \frac{e^{-\lambda_1 r}}{r^3} + x_k \left(\frac{e^{-\lambda_1 r}}{r^3} \right),_j - \lambda_2 \delta_{kj} \frac{e^{-\lambda_2 r}}{r^2} - \lambda_2 x_k \left(\frac{e^{-\lambda_2 r}}{r^2} \right),_j - \delta_{kj} \frac{e^{-\lambda_2 r}}{r^3} -$$

$$\left. - x_k \left(\frac{e^{-\lambda_2 r}}{r^3} \right),_j \right] = \frac{s^2\rho_f}{4\pi\rho(\lambda_1^2-\lambda_2^2)} \frac{\alpha-\beta}{K+4G/3} \left[\lambda_1 \delta_{kj} \frac{e^{-\lambda_1 r}}{r^2} - \lambda_1 x_k \frac{(2+\lambda_1 r) x_j e^{-\lambda_1 r}}{r^4} + \right.$$

$$+ \delta_{kj} \frac{e^{-\lambda_1 r}}{r^3} - x_k \frac{(3+\lambda_1 r) x_j e^{-\lambda_1 r}}{r^5} - \lambda_2 \delta_{kj} \frac{e^{-\lambda_2 r}}{r^2} + \lambda_2 x_k \frac{(2+\lambda_2 r) x_j e^{-\lambda_2 r}}{r^4} -$$

$$\left. - \delta_{kj} \frac{e^{-\lambda_2 r}}{r^3} + x_k \frac{(3+\lambda_2 r) x_j e^{-\lambda_2 r}}{r^5} \right].$$

Эта формула является основной для устранения ошибки в выражении для $\widetilde{T}_i^f$.

Если записать соотношение

$$\left(K - \frac{2}{3} G \right) \widetilde{U}_{k,k}^j \delta_{il} n_l = \frac{s^2\rho_f}{4\pi\beta(\lambda_1^2-\lambda_2^2)} \times$$

$$\times \frac{1}{r} \left(\frac{(\alpha-\beta)(K-2G/3)}{K+4G/3} \left[\left(\frac{2}{r^2} + \frac{2\lambda_2}{r} + \lambda_2^2 \right) e^{-\lambda_2 r} - \left(\frac{2}{r^2} + \frac{2\lambda_1}{r} + \lambda_1^2 \right) e^{-\lambda_1 r} \right] \right) n_i , \qquad (2)$$

то получим на основе (1) следующий вид для $\widetilde{T}_i^f$ [4]:

$$\widetilde{T}_i^f = \frac{s^2\rho_f}{4\pi r \beta(\lambda_1^2-\lambda_2^2)} \left[\frac{n_j(\alpha-\beta)2G}{K+4G/3} (R_2 e^{-\lambda_2 r} - R_1 e^{-\lambda_1 r}) + \right.$$

$$+ n_i e^{-\lambda_2 r} \left(\frac{(\alpha-\beta)(K-2G/3)}{K+4G/3} \left(\frac{2}{r^2} + \frac{2\lambda_2}{r} + \lambda_2^2 \right) - \alpha(\lambda_2^2 - \lambda_4^2) \right) -$$

$$-n_i e^{-\lambda_1 r}\left(\frac{(\alpha-\beta)(K-2G/3)}{K+4G/3}\left(\frac{2}{r^2}+\frac{2\lambda_1}{r}+\lambda_1^2\right)-\alpha(\lambda_1^2-\lambda_4^2)\right)\Bigg].$$

Выражение (2) может быть записано с использованием (1) только при условии, что слагаемые, содержащие дельту Кронекера, не складываются, что неверно. Правильное соотношение будет таким:

$$\left(K-\frac{2}{3}G\right)U_{k,k}^j\delta_{ie}n_e=\frac{s^2\rho_f}{4\pi\beta(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\frac{1}{r}\left(\frac{(\alpha-\beta)(K-2G/3)}{K+4G/3}\left[\lambda_2^2 e^{-\lambda_2 r}-\lambda_1^2 e^{-\lambda_1 r}\right]\right)n_i.$$

На основе этого соотношения получим ядро:

$$\widetilde{T}_i^f=\frac{s^2\rho_f}{4\pi r\beta(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}\Bigg[\frac{n_j(\alpha-\beta)2G}{K+4G/3}(R_2 e^{-\lambda_2 r}-R_1 e^{-\lambda_1 r})+$$

$$+n_i e^{-\lambda_2 r}\left(\frac{(\alpha-\beta)(K-2G/3)}{K+4G/3}\lambda_2^2-\alpha(\lambda_2^2-\lambda_4^2)\right)-$$

$$-n_i e^{-\lambda_1 r}\left(\frac{(\alpha-\beta)(K-2G/3)}{K+4G/3}\lambda_1^2-\alpha(\lambda_1^2-\lambda_4^2)\right)\Bigg].$$

Это ядро далее используется в ГИУ и в гранично-элементной дискретизации. Ядра интегральных представлений допускают следующее выделение особенностей:

$$\widetilde{P}_i^s=O(r^0),\quad \widetilde{U}_i^f=O(r^0),$$

$$\widetilde{U}_{ij}^s=\frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\{r_{,i}r_{,j}+\delta_{ij}(3-4\nu)\}\frac{1}{r}+O(r^0),$$

$$\widetilde{P}^f=\frac{\rho_f s}{4\pi\beta}\frac{1}{r}+O(r^0),$$

$$\widetilde{Q}_j^s=\frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)}\{\alpha(1-2\nu)(r_{,n}r_{,j}-n_j)-2\beta(1-\nu)(r_{,n}r_{,j}+n_j)\}\frac{1}{r}+O(r^0),$$

$$\widetilde{T}_i^f=\frac{\rho_f s^2}{8\pi\beta}\left\{(\alpha-\beta)\frac{1-2\nu}{1-\nu}r_{,i}r_{,j}+n_i\frac{\alpha+\beta(1-2\nu)}{1-\nu}\right\}\frac{1}{r}+O(r^0),$$

$$\widetilde{T}_{ij}^s=\frac{-((1-2\nu)\delta_{ij}+3r_{,i}r_{,j})r_{,n}+(1-2\nu)(r_{,j}n_i-r_{,i}n_j)}{8\pi(1-\nu)r^2}+O(r^0),$$

$$\widetilde{Q}^f=-\frac{r_{,n}}{4\pi r^2}+O(r^0).$$

Итоговая система ГИУ примет вид:

$$\begin{bmatrix}c_{ij}(y) & 0\\ 0 & c(y)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i(t,x)\\ p(t,x)\end{bmatrix}+\int_0^t\int_\Gamma\begin{bmatrix}T_{ij}^s(t-\tau,y,x) & Q_j^s(t-\tau,y,x)\\ T_i^f(t-\tau,y,x) & Q^f(t-\tau,y,x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i(\tau,x)\\ p(\tau,x)\end{bmatrix}d\Gamma d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_\Gamma \begin{bmatrix} U_{ij}^s(t-\tau,y,x) & -P_j^s(t-\tau,y,x) \\ U_i^f(t-\tau,y,x) & -P^f(t-\tau,y,x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_i(\tau,x) \\ q(\tau,x)\end{bmatrix} d\Gamma d\tau.$$

На основе этой системы строится дискретный аналог, детальное описание которого можно найти в [6].

3. Гранично-элементная дискретизация

Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматриваем регуляризованное уравнение:

$$\hat{\alpha}_\Omega \upsilon_k(x,t)+\int_0^t\int_\Gamma (\hat{T}_{ik}(x,y,t-\tau)\hat{\upsilon}_i(y,\tau)-\hat{T}_{ik}^0(x,y,t-\tau)\hat{\upsilon}_i(x,\tau)-$$

$$-\hat{G}_{ik}(x,y,t-\tau)\hat{t}_i(y,\tau))d\Gamma d\tau=0, \quad (x\in\partial\Gamma), \quad t=[\hat{t}_1,t_2,t_3,q]^{\mathrm{T}}.$$

Матрица – ядро $\hat{T}_{ik}^0$ – образована слагаемыми компонент, содержащих особенности. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности Γ на граничные элементы: четырехугольные и треугольные восьмиузловые биквадратичные элементы. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы (рис. 1). Связь локальной и глобальной систем координат $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $y=(y_1(\xi), y_2(\xi), y_3(\xi))$, записывается через функции формы $N^i(\xi)$:

$$y_i(\xi)=\sum_{l=1}^{8} N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \quad i=1,2,3, \quad \xi\in\Delta_e,$$

где $\beta(k, l)$ – глобальный номер узла, имеющего в k-м элементе локальный номер l.

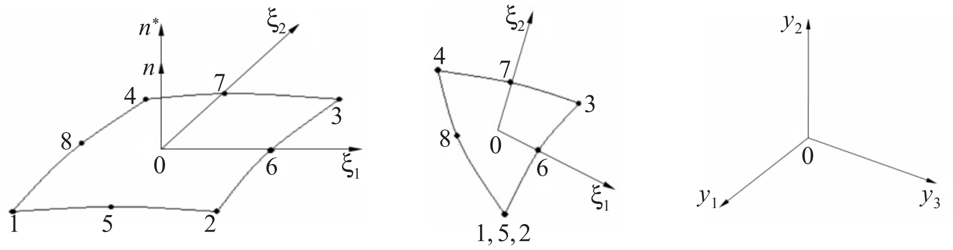

Рис. 1

Далее определяется естественный базис, метрический тензор и единичная нормаль на элементе. Неизвестные граничные поля $(\hat{\upsilon},\hat{t})$ интерполируются через узловые значения.

Рассматриваем случай, называемый согласованным интерполированием, где для аппроксимации граничных перемещений применяем билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоянные элементы.

Для получения дискретного аналога ГИУ применяем метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируется система линейных алгебраических уравнений. Необходимо отметить, что коэффициенты дискретных аналогов имеют особенность типа $1/r$ и $1/r^2$. Это определяет специфику вычислительного процесса. Регулярный интеграл вычисляется на основе квадратурной формулы Гаусса. Для интегралов с особенностью используется прием ее устранения.

Для решения ГИУ по времени используем следующий алгоритм. Пусть имеем интеграл:

$$y = \int_0^t q(\tau) d\tau,$$

тогда можно построить квадратурную формулу:

$$y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \omega_{n-k}(\Delta t), \quad n = 0,1,\ldots,N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \overline{q}(\gamma(R\, e^{il2\pi L^{-1}}) / \Delta t)\, e^{-inl2\pi L^{-1}},$$

$$\gamma(z) = \frac{3}{2} - 2z + \frac{z^2}{2},$$

где $\overline{q}$ – изображение по Лапласу функции q.

Спецификой алгоритма является то, что оригинал искомой функции $y(t)$ строится не на основе базового интегрального соотношения для обратного преобразования Лапласа (интеграла Меллина), как строятся все алгоритмы обращения, а на основе теоремы об интегрировании оригинала для $g(t)$.

4. Численные результаты

Рассмотрена задача, изображенная на рис. 2, со следующими параметрами: $K = 8\cdot10^9$ Н/м²; $G = 6\cdot10^9$ Н/м²; $R = 4{,}7\cdot10^8$ Н/м²; $k = 1{,}9\cdot10^{-10}$ м⁴/(Н·с); $\rho = 2458$ кг/м³; $\rho_f = 1000$ кг/м³; $\phi = 0{,}19$; $\alpha = 0{,}867$. Нагрузка, действующая на тело $t_2 = 1$ Н/м². Граничные условия в области Лапласа имеют вид: $\tilde{u}_2(y_2 = 0) = 0$, $\tilde{q}_2(y_2 = 0) = 0$, $\tilde{\sigma}_2(y_2 = l) = -1/s$, $\tilde{p}(y_2 = l) = 0$.

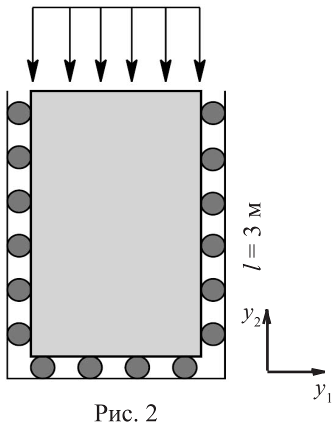

Рис. 2

Гранично-элементная сетка, изображенная на рис. 3, состоит из 504 элементов. Результаты расчетов перемещений и давлений приведены на рис. 4, 5 соответственно. Графики, изображенные сплошной линией, соответствуют точному решению, штриховой – решениям, полученным по новым ядрам, пунктирной – по ядрам из [4].

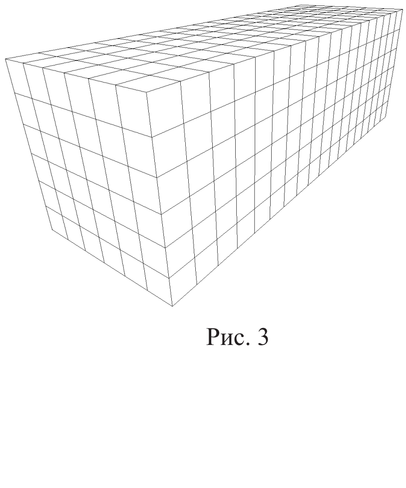

Рис. 3

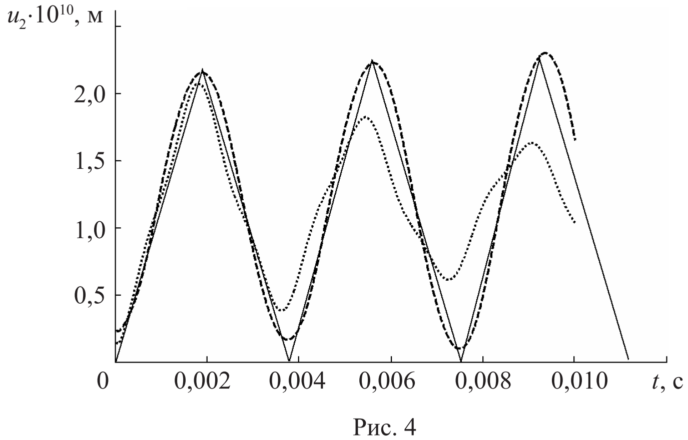

Рис. 4

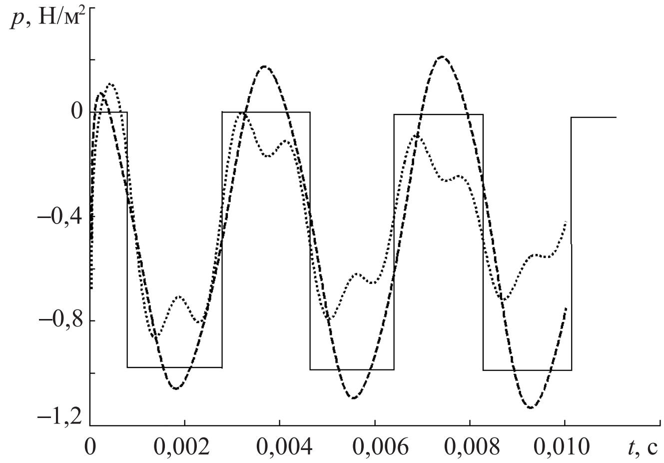

Рис. 5

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $t_3(t) = P_0 f(t)$, $P_0 = -1000$ Н/м², $f(t) = H(t)$, на поверхность полупространства (рис. 6) со следующими параметрами материала: $E = 2{,}544 \cdot 10^8$ Н/м², $k = 3{,}55 \cdot 10^{-3}$ м⁴/(Н·с), $\nu = 0{,}298$, $R = 1{,}2 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho =$ $= 1884$ кг/м³, $\rho_f = 1000$ кг/м³, $\phi = 0{,}48$, $\alpha = 0{,}98$.

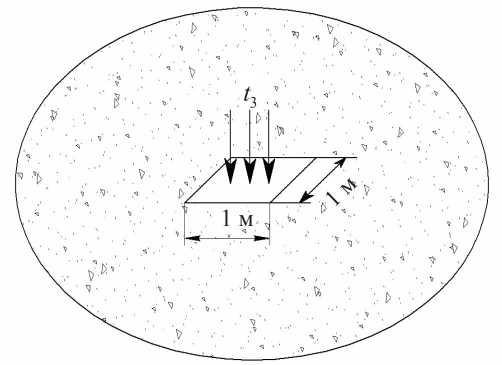

Рис. 6

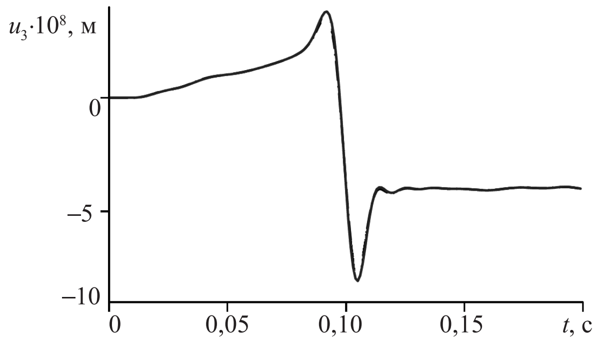

Рис. 4

На рис. 7 приведены вертикальные перемещения на расстоянии 20 м от области нагружения. Поверхность полупространства описывается регулярной ГЭ-сеткой, состоящей из 3088 элементов.

Построены новые сингулярные ГИУ пороупругости (модель Био) для решения краевых динамических задач. Показано, что результаты Schanz M. [4] содержат ошибку, то есть предложенные им интегральные решения не являются эквивалентными исходной дифференциальной постановке. На основе новых ГИУ пороупругости получены численные гранично-элементные решения прямых трехмерных динамических задач.

Литература

1. *Френкель*, *Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве / Я.И. Френкель // Изв. АН СССР. Сер. географ. и геофизич. – 1944. – Т. 8, №4. – С. 65–78.
2. *Biot*, *M.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, №2. – P. 168–178.
3. *Biot*, *M.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range / M. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – V. 28, №2. – P. 179–191.
4. *Schanz*, *M.* Wave propogation in viscoelastic and poroelastic continua / M. Schanz. – Berlin: Springer, 2001. – 170 p.
5. *Manolis*, *G.D.* Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity / G.D. Manolis, D.E. Beskos // Ada Mechanica. – 1989. – №76. – P. 89–104.
6. *Баженов*, *В.Г.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А Игумнов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

[08.10.2009]

BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR ANALYZING DYNAMIC PROBLEMS OF 3-D POROUSELASTICITY

A.V. Amenitsky, A.A. Belov, L.A. Igumnov, I.S. Karelin

A model of a porous medium with a two-phase internal structure introduced by Biot is studied. To analyze boundary-value problems of 3-D porouselasticity, a new system of boundary integral equations is constructed. To develop a boundary-element methodology, a new method for numerically inverting Laplace transform, is constructed. Numerical experiments are presented.

Key words: novel boundary integral equations, 3-D dynamic porouselasticity.