

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА БАЛОК И ПЛАСТИН

© 2017 г.

Капустин С.А.¹, Чурилов Ю.А.¹,
Рябов А.А.², Романов В.И.², Плакунов Д.А.²

¹Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация
²ООО «Саровский инженерный центр», Нижегородская обл., Дивеевский район,
Сатис, Российская Федерация

chyuan@rambler.ru

Поступила в редакцию 12.12.2016

Рассматриваются вопросы эффективности применения моделей твердотельных конечных элементов для решения задач изгиба балок и пластин.

Приведены краткий обзор работ и некоторые теоретические оценки применимости твердотельных конечных элементов для описания напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций. Сформулированы рекомендации по выбору моделей твердотельных конечных элементов для решения задач изгиба тонкостенных конструкций, эффективность применения которых может конкурировать с конечными элементами пластин и оболочек на основе соотношений Кирхгофа – Лява.

Приведены результаты численных исследований по оценке влияния параметров конечно-элементной дискретизации на точность расчета напряженно-деформированного состояния изгибаемых пластин в зависимости от числа разбиений по толщине и относительных толщин пластин с использованием ряда различных моделей твердотельных конечных элементов. Сформулированы рекомендации по выбору параметров дискретизации для различных моделей твердотельных элементов при заданной погрешности определения напряжений.

Представлены результаты исследований точности и сходимости численных решений задач изгиба балок и пластин при различных вариантах нагружения, полученных на основе различных моделей твердотельных конечных элементов, реализованных в программах ANSYS, Abaqus, ЛОГОС-П, УПАКС.

Ключевые слова: твердотельные конечные элементы, изгиб, балки, пластины.

Введение

В последние десятилетия в различных отраслях науки и техники в решении проблем прочности при разработке новых наукоемких изделий все большее применение находят технологии компьютерного моделирования. Современные комплек-

сы программ ANSYS [1], Abaqus [2], ЛОГОС-П [3], УПАКС [4] и многие другие, основанные на методе конечных элементов (МКЭ), обладают развитыми библиотеками конечных элементов (КЭ), позволяющими решать широкий круг прикладных проблем. Однако для подтверждения достоверности численных результатов нужна верификация компьютерных моделей на основе аналитических либо численных решений различными методами и экспериментальных данных [5, 6]. В настоящей статье основное внимание уделяется изучению работоспособности и эффективности применения твердотельных КЭ, широко используемых при решении задач изгиба балок и пластин.

Особенности применения МКЭ для решения задач изгиба на основе различных моделей КЭ рассмотрены в большом количестве работ отечественных и зарубежных авторов [7–16]. В этих работах отмечены основные трудности формулировки эффективных моделей КЭ для решения задач изгиба пластин на основе гипотез Кирхгофа – Лява, сдвиговых моделей типа Тимошенко [8, 12–14] и традиционно используемых твердотельных моделей КЭ. Однако до сих пор остается ряд нерешенных вопросов, касающихся выбора твердотельных моделей элементов и построения схем дискретизации тонкостенных конструкций, обеспечивающих необходимую точность и вычислительную эффективность расчетов при решении конкретных задач. Поэтому вопросы выбора оптимальных моделей, схем дискретизации и сходимости численных решений различных прикладных задач являются актуальными и постоянно привлекают внимание ученых [17–19].

Для решения названных проблем должны быть проведены оценки точности получаемых результатов в зависимости от параметров дискретизации конструкций на основе используемых моделей КЭ, что в общем случае представляется практически неосуществимым. Однако такие оценки можно получить для некоторых классов задач расчета конструкций, характеризующихся конкретными видами напряженно-деформированного состояния (НДС).

В частности, если ограничить класс решаемых задач исследованием конструкций на основе гипотез Кирхгофа – Лява, то реализуемые в таких конструкциях виды НДС можно подразделить на:

- безмоментное состояние;
- моментное состояние (краевой эффект);
- погранслои (концентрация напряжений).

Первые два вида описываются в рамках теории тонких пластин и оболочек, соотношения которых могут быть использованы для оценки точности КЭ-решений.

Третий вид НДС имеет место в локальных зонах, размер которых обычно меньше толщины оболочки и не описывается соотношениями теории оболочек. Особенностью этого вида является сложный характер изменения напряжений с высокими градиентами изменения функций, поэтому решение таких задач должно производиться на основе общих уравнений теории упругости без привлечения каких-либо упрощающих гипотез о характере распределения напряжений и деформаций.

В настоящей статье основное внимание уделяется описанию на основе твердотельных КЭ первых двух видов НДС, реализуемых в тонкостенных конструкциях типа пластин и оболочек. Поэтому основным критерием для выбора оптимальных твердотельных КЭ, используемых для анализа поведения таких конструкций, должно быть условие, чтобы получаемые результаты оказывались не хуже результатов аналитического решения задач, построенных на основе гипотез Кирхгофа – Лява, а

вычислительная эффективность расчетов не ниже той, которая может быть достигнута при использовании соответствующих КЭ пластин и оболочек.

При исследовании НДС тонкостенных конструкций (безмоментное и моментное состояния) существенное значение имеют характерные особенности распределения напряжений и деформаций, определяемые гипотезами Кирхгофа – Лява. Согласно этим гипотезам, мембранные напряжения, действующие параллельно срединной плоскости, меняются по толщине по линейному закону, а напряжения, нормальные к срединной поверхности, пренебрежимо малы. Таким образом, закон изменения напряжений по толщине определен однозначно, и разнообразие распределения НДС в пластинах и оболочках будет определяться закономерностями изменения функций вдоль срединной поверхности.

Названное обстоятельство позволяет сразу ограничить класс твердотельных КЭ, которые могут быть эффективно использованы для анализа НДС рассматриваемого вида конструкций. Поскольку удовлетворительная точность численного решения для большинства КЭ может быть достигнута лишь при достаточно ограниченном отношении размеров сторон используемых элементов, эффективные модели должны позволять точно описывать формы изгиба тонкостенных конструкций при расположении их в один слой по толщине.

Действительно, увеличение числа слоев КЭ по толщине приводит к кубическому увеличению общего числа КЭ конструкции, а вычислительная эффективность использования таких элементов будет существенно проигрывать вычислительной эффективности аналогичных конечных элементов пластин и оболочек.

Еще одним важным качеством, определяющим эффективность твердотельных КЭ, применяемых для анализа тонкостенных конструкций, следует считать возможно более слабую зависимость снижения точности решений при увеличении соотношений сторон КЭ.

Следует также иметь в виду, что закономерности изменения перемещений и напряжений в конструкциях по толщине ограничены гипотезами Кирхгофа – Лява и могут быть точно описаны квадратичными твердотельными КЭ и даже некоторыми модифицированными твердотельными элементами с линейным распределением функций. Однако закономерности изменения указанных функций вдоль срединной поверхности конструкций ограничений не имеют, и для их описания необходимо либо увеличивать число КЭ, либо повышать порядок аппроксимации функций. Последний вариант не является оптимальным, так как приводит к необоснованному повышению порядка аппроксимации функций по толщине оболочки (то есть повышению трудоемкости вычислений) и не позволяет существенно снизить общую трудоемкость из-за ограничения соотношения размеров сторон элементов, поскольку размер стороны элемента в направлении нормали ограничен толщиной оболочки. Поэтому наиболее разумным решением вопросов, касающихся выбора эффективных твердотельных КЭ, следует считать использование элементов с минимальным порядком аппроксимации функций, позволяющих точно описать законы распределения перемещений и деформаций по толщине конструкции и повышать точность решений за счет сгущения сетки КЭ вдоль ее срединной поверхности.

1. Некоторые теоретические оценки применимости твердотельных КЭ для описания НДС в тонкостенных элементах конструкций

Многочисленные исследования различных авторов, посвященные применению трехмерных элементов для анализа видов НДС, характерных для оболочек и изгибаемых пластин, обнаружили причину плохой сходимости решений на их основе в неспособности таких элементов точно воспроизводить простейшие состояния деформирования, и в частности состояния чистого изгиба [7].

Вообще говоря, точное воспроизведение в каждом элементе условий чистого изгиба не является строгим требованием к координатным функциям в МКЭ, так как эти условия соответствуют состоянию линейной деформации. Поэтому в соответствии с классическими требованиями полноты в МКЭ достаточно, чтобы используемый элемент воспроизводил лишь любые постоянные состояния деформирования. Однако при исследовании конструкций, находящихся в условиях изгиба, на основе КЭ, располагающихся в один слой по толщине, требование постоянства деформаций в элементах оказывается явно недостаточным для получения удовлетворительных результатов и должно быть заменено эквивалентным условием точного описания состояния чистого изгиба. Кстати, в изгибаемых балках и плитах это условие становится эквивалентным условию постоянства деформации, которому должны удовлетворять КЭ в соответствии с классическими требованиями МКЭ.

В [7] рассмотрены ошибки, возникающие при исследовании задачи изгиба. Исследования проводились на основе различных моделей твердотельных КЭ в условиях плоского напряженного состояния путем представления в виде степенных рядов локального распределения компонент перемещений u , v и деформаций e_{11} , e_{22} , e_{12} , соответствующих точному решению, в окрестности некоторой точки элемента с локальными координатами $X = Y = 0$:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 X + a_3 Y + a_4 XY + a_5 X^2 + \dots, \\ v &= b_1 + b_2 X + b_3 Y + b_4 XY + b_5 X^2 + \dots, \\ e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial X} = a_2 + a_4 Y + 2a_5 X + 2a_7 XY + \dots, \\ e_{22} &= \frac{\partial v}{\partial Y} = b_3 + b_4 X + 2b_6 Y + 2b_8 XY + \dots, \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = \gamma_1 + \gamma_2 X + \gamma_3 Y + \gamma_4 XY + \dots, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2}(a_3 + b_2), \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}(a_4 + 2b_5), \quad \gamma_3 = \frac{1}{2}(2a_6 + b_4) \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Точное решение задачи чистого изгиба имеет вид:

$$u'' = AX \cdot Y; \quad v'' = \frac{1}{2} A(B^2 - X^2 - \mu Y^2), \quad (2)$$

где A , B , μ – константы. Для этого случая параметры разложения (1) примут следующие значения:

$$\begin{aligned} u'' &= a_4 XY, \quad v'' = b_1 + b_5 X^2 + b_6 Y^2, \\ a_4 &= A, \quad b_1 = \frac{1}{2} AB^2, \quad b_5 = -\frac{1}{2} A, \quad b_6 = -\frac{\mu}{2} A, \end{aligned}$$

$$e_{11}'' = a_4 Y = AY, \quad e_{22}'' = 2b_6 Y = -\mu AY, \quad e_{12}'' = \frac{1}{2}(a_4 X + 2b_5 X) = 0. \quad (3)$$

В случае простейших элементов с линейным законом изменения перемещений все компоненты деформации \bar{e}_{ij} точно описываются первыми (постоянными) членами в разложении (1):

$$\bar{e}_{11} = a_2, \quad \bar{e}_{22} = b_3, \quad \bar{e}_{12} = \gamma_1 = \frac{1}{2}(a_3 + b_2). \quad (4)$$

Состояние изгиба на одном элементе такого типа не может быть воспроизведено вообще, хотя возможность описания элементом постоянных деформаций позволяет ожидать получения решений, сходящихся к точному решению по мере сгущения сетки КЭ.

В случае применения билинейных функций для описания перемещений мембранные компоненты деформаций точно описывают постоянные деформации и по одному из линейных членов разложения, а сдвиговые компоненты содержат лишь постоянный член, причем имеют место ошибки в описании линейных членов:

$$\bar{e}_{11} = a_2 + a_4 Y, \quad \bar{e}_{22} = b_3 + b_4 X, \quad \bar{e}_{12} = \gamma_1 + a_4 X + b_4 Y. \quad (5)$$

Применительно к случаю чистого изгиба использование одного элемента по толщине точно описывает лишь продольную деформацию. Остальные компоненты описываются с ошибкой:

$$\begin{aligned} \bar{e}_{11}'' &= AY, \quad \Delta e_{11}'' = e_{11}'' - \bar{e}_{11}'' = 0, \\ \bar{e}_{22}'' &= 0, \quad \Delta e_{22}'' = e_{22}'' - \bar{e}_{22}'' = -\mu AY, \\ \bar{e}_{12}'' &= AX, \quad \Delta e_{12}'' = e_{12}'' - \bar{e}_{12}'' = -AX. \end{aligned} \quad (6)$$

Ошибка в определении поперечной деформации приводит к тому, что при использовании одного элемента по толщине искомое решение будет сходиться к решению другой задачи для материала с коэффициентом поперечной деформации $\mu = 0$.

Ошибка в определении сдвиговой деформации приводит к значительному снижению точности и сходимости решений и является причиной «сдвигового запираания» элемента.

Проинтегрировав отдельно энергию мембранных Π_ϵ и сдвиговых Π_γ составляющих деформации в рассмотренном элементе F , получим:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_\epsilon &= \int_F \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{11} \bar{e}_{11} dF = \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{G}{1-\mu} A^2 Y^2 dY dX = \frac{GA^2 h^3 l}{12(1-\mu)}, \\ \bar{\Pi}_\gamma &= \int_F \bar{\sigma}_{12} \bar{e}_{12} dF = \int_{-l/2}^{+l/2} \int_{-h/2}^{+h/2} 2G A^2 X^2 dY dX = \frac{GA^2 h l^3}{6} \end{aligned} \quad (7)$$

или

$$\bar{\Pi}_\gamma = 2(1-\mu) \left(\frac{l}{h} \right)^2 \bar{\Pi}_\epsilon, \quad (8)$$

где l – длина, h – ширина элемента.

Таким образом, энергия ложного сдвига Π_γ имеет величину, близкую к энергии основных членов Π_ϵ при отношении сторон элемента $l/h = 1$, и растет по квадратичному закону при увеличении этого параметра.

Повышая порядок аппроксимации функций перемещений u , v в элементе до полного квадрата, можно получить КЭ, точно описывающий постоянные и линейные члены в разложении (1) для всех компонент деформаций:

$$\begin{aligned}\bar{e}_{11} &= a_2 + 2a_5X + a_4Y, \\ \bar{e}_{22} &= b_3 + b_4X + 2b_6Y, \\ \bar{e}_{12} &= \gamma_1 + \gamma_2X + \gamma_3Y.\end{aligned}\tag{9}$$

Такой элемент точно описывает состояние чистого изгиба и должен приводить к хорошим результатам при использовании одного элемента по толщине.

Дальнейшее повышение порядка аппроксимирующих полиномов до биквадратичных (сирендипова аппроксимация) приводит к элементам, в которых точно представлены все постоянные, линейные составляющие и по два квадратичных члена в разложении (1) для нормальных компонент деформации. Для сдвиговых компонент точно представлены постоянная и линейная составляющие, а квадратичные содержат ошибку. Этот элемент точно воспроизводит состояние чистого изгиба, а ошибка в определении сдвиговых членов начинает сказываться в задачах, где изгибающий момент меняется по линейному закону и законам более высокого порядка.

2. Оценка влияния параметров КЭ-дискретизации на точность расчета НДС изгибаемых пластин с использованием твердотельных элементов

В качестве типовой задачи, выбранной для иллюстрации влияния типов твердотельных моделей и параметров КЭ-дискретизации на точность расчета НДС изгибаемых пластин, рассматриваемых в рамках классической гипотезы Кирхгофа – Лява, использована задача изгиба консольной балки прямоугольного сечения для ряда различных вариантов нагружения и при различных значениях относительной высоты H/L (отношения высоты балки H к ее длине L). Такая задача эквивалентна задаче плоского изгиба прямоугольной пластины единичной толщины длиной L (вдоль оси x), шириной H (вдоль оси y), жестко заделанной по одной из кромок (вдоль оси y при $x = 0$), и незакрепленными оставшимися тремя кромками.

Значения относительной высоты балок варьировались в пределах $0,2-0,02$ ($L = 50-500$ мм).

Численные решения получены для прямоугольной пластины единичной толщины, левая грань которой закреплена от горизонтальных перемещений, от вертикальных перемещений закреплена лишь одна нижняя точка грани, а остальные грани свободны. Пластина находилась под действием следующих вариантов нагрузок i :

$i = a$ – изгибающий момент $M = \text{const}$, действующий в плоскости пластины, создаваемый горизонтальной нагрузкой, меняющейся по линейному закону вдоль правой вертикальной грани пластины (эквивалент чистому изгибу балки);

$i = b$ – вертикальная сила P , действующая вдоль правой вертикальной грани пластины и задаваемая в виде вертикальной нагрузки, распределенной равномерно вдоль этой грани (линейное изменение изгибающего момента по длине балки $M = Px$);

$i = c$ – вертикальная нагрузка $q = \text{const}$, равномерно распределенная по верхней грани пластины (квадратичное изменение изгибающего момента по длине балки $M = qx^2/2$).

Численные решения задач строились при различных числах m и n разбиений исследуемых пластин регулярной сеткой КЭ: m – вдоль оси x и n – вдоль оси y .

Расчеты проводились на основе применения следующих моделей КЭ:

4 – билинейный четырехузловой КЭ пластины с полным интегрированием функций в условиях плоско-напряженного состояния (типа PLANE 182 в ANSYS);

4М – модифицированный билинейный четырехузловой КЭ пластины в условиях плоско-напряженного состояния с опцией внешних мод (типа PLANE 182 в ANSYS);

8 – квадратичный восьмиузловой КЭ пластины с полным интегрированием функций (альтернативный двадцатиузловому КЭ SOLID 186 в ANSYS при рассмотрении задачи в пространственной постановке);

8М – квадратичный восьмиузловой КЭ пластины в условиях плоско-напряженного состояния с использованием схемы улучшенного интегрирования [4, 15] (типа 05 в ВК УПАКС).

В процессе решения задач контролировались максимальные значения вертикальных перемещений W , которые имели место на свободном торце балки, и максимальные значения нормальных напряжений в заделке σ , а также относительные погрешности определения названных величин:

$$\Delta W = \frac{W - W_0}{W_0}, \quad \Delta \sigma = \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (10)$$

где W_0 и σ_0 – результаты аналитического решения для балок в рамках соотношений Кирхгофа – Лява.

На основе анализа проведенных исследований удалось установить ряд закономерностей влияния параметров дискретизации на точность решения задач изгибаемых пластин при использовании рассмотренных моделей твердотельных КЭ.

1. Если ограничиться допустимой погрешностью определения максимальных перемещений $[W] \approx 1\%$ и напряжений $[\sigma] \approx 5\%$, то для всех рассмотренных задач ограничения применимости определяются погрешностью вычисления напряжений в крайних волокнах закрепленного торца балки, причем значения напряжений в этих точках возрастают по мере сгущения.

2. По мере повышения порядка изменения изгибающего момента по длине балки возрастает погрешность определения напряжений для всех рассмотренных моделей КЭ и всех вариантов дискретизации.

3. При решении задач на основе модели 4 удовлетворительные результаты (соответствующие оговоренным выше значениям допустимых погрешностей) для всех рассмотренных вариантов нагружения могут быть получены при разбиении толщины балки (ширины пластины) на несколько участков.

4. При использовании моделей 4М, 8 и 8М для решения задач, соответствующих условиям чистого изгиба балки (пластины), удовлетворительные по точности результаты могут быть получены при $n = 1$ и относительной длине КЭ $\lambda = l/h \leq 5$ (l – длина элемента, h – его толщина).

5. В случаях использования модели 4М состояние линейного изгиба может быть удовлетворительно описано для коротких балок ($t = L/H = 5$) при $n \geq 2$ и $\lambda = 1$, а для длинных балок ($L/H = 50$) при $n = 1$ и $\lambda \leq 5$. В случае квадратичного изгиба аналогичные значения параметров дискретизации должны составлять: для коротких балок $n \geq 3$, $\lambda = 1$; для длинных балок $n = 1$ и $\lambda \leq 2$. При этом в последнем случае

увеличение числа разбиений по толщине ($n = 2$) при неизменной длине элемента l приводит к некоторому ухудшению результатов (очевидно, за счет увеличения относительной длины элемента λ).

6. В случаях использования модели 8М состояние линейного изгиба может быть удовлетворительно описано для коротких балок при $n = 1$ и $\lambda \leq 5$, а для длинных балок при $n = 1$ и $\lambda \leq 50$. В случае квадратичного изгиба аналогичные значения параметров дискретизации должны составлять: для коротких балок $n = 1$ и $\lambda \leq 2,75$; для длинных балок $n = 1$ и $\lambda \leq 30$.

7. Показатели точности и эффективности модели 8 оказываются близкими к аналогичным показателям модели 8М при значениях относительных длин КЭ $\lambda \leq 1,5-2$. С увеличением значений λ погрешность решений начинает резко возрастать.

Для наглядной иллюстрации представленных результатов на рис. 1а, б приведены зависимости погрешности определения напряжений $\Delta\sigma(n)$ для коротких балок ($t = 5$) при $\lambda = 1$ для рассмотренных вариантов моделей КЭ в зависимости от варианта нагружения i и числа разбиений n по ширине пластины (толщине балки). На графиках указаны индекс модели и вариант нагружения (в скобках). Положительные значения погрешности $\Delta\sigma(n)$ свидетельствуют о том, что полученные значения напряжений оказываются ближе к решению на основе точных уравнений теории упругости, чем те, которые предсказывает прикладная теория пластин на основе гипотез Кирхгофа – Лява.

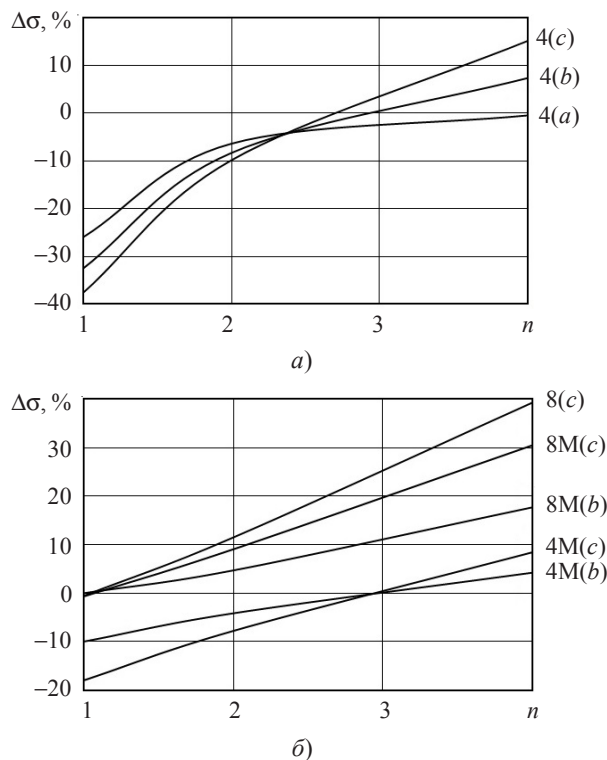


Рис. 1

Из графиков видно, что для рассмотренных вариантов нагружения коротких балок возможность использования одного элемента по толщине ($n = 1$) допускают лишь КЭ с квадратичной аппроксимацией функций.

На рис. 2 приведены зависимости погрешности определения напряжений $\Delta\sigma(\lambda)$ для варианта нагружения $i = c$ при $n = 1$ для различных моделей КЭ в зависимости от относительной длины элемента λ и относительной длины балки. На графиках указаны индексы моделей и значения относительной длины балки t (в скобках).

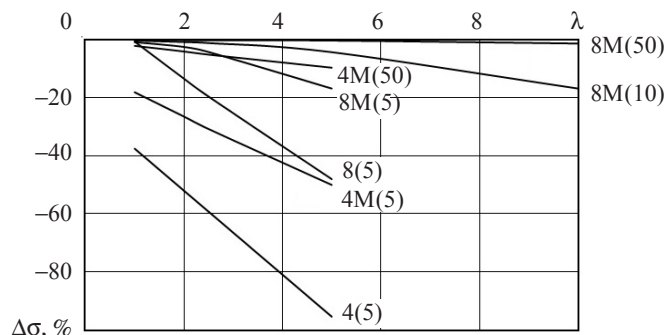


Рис. 2

Приведенные выше результаты представляют собой лишь материалы, на основании которых можно выбрать конкретные значения параметров дискретизации при исследовании задач изгиба пластин с использованием твердотельных КЭ. Для того чтобы осуществить такой выбор, необходимо определиться с принимаемыми значениями допустимой погрешности вычисления напряжений.

В частности, в качестве допустимой погрешности $[\sigma]$ можно принять величину, обычно используемую в качестве погрешности решений задач расчета тонких оболочек в рамках соотношений Кирхгофа – Лява, определяемую относительной толщиной оболочки. В случае задач изгиба пластин величину такой погрешности можно определить как $[\sigma] = H/L$. Значения допустимой относительной длины элемента λ для варианта нагружения, соответствующего квадратичному изгибу ($i = c$) при $n = 1$, в зависимости от относительной длины балки t при таком определении допустимой погрешности приведены на рис. 3.

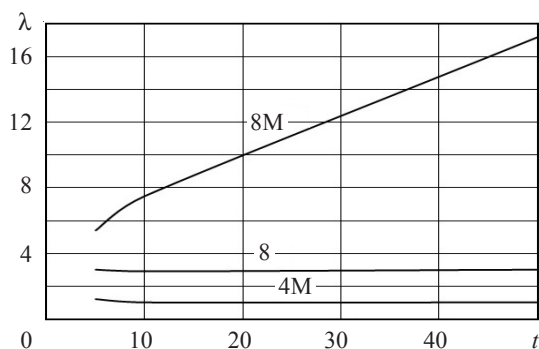


Рис. 3

В более общем случае допустимую погрешность можно определить в виде константы $[\sigma] = \text{const}$, не зависящей от каких-либо параметров исследуемых конструкций, при этом изменятся и допустимые значения относительных длин КЭ. В частности, на рис. 4 приведены такие значения для погрешности $[\sigma] = 5\%$ и различных индексов моделей.

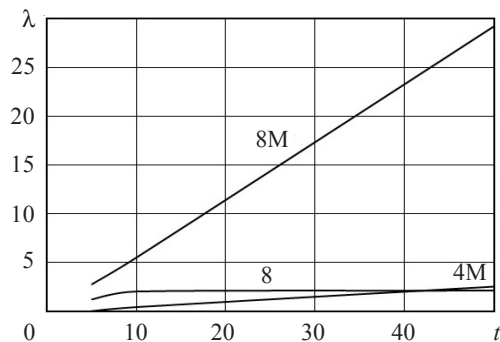


Рис. 4

3. Исследование сходимости различных моделей твердотельных элементов, реализованных в программных комплексах ANSYS, Abaqus, ЛОГОС, при решении задач изгиба балок и пластин

Численное исследование задач изгиба балок и пластин строилось на основе наиболее популярных в практике расчетов моделей КЭ:

– для линейных восьмиузловых КЭ:

ANSYS: SOLID185(1) – стандартный, SOLID185(2), SOLID185(3) – модифицированные;

Abaqus: C3D8 – стандартный, C3D8I – модифицированный;

ЛОГОС-П: 8УП – стандартный, 8УУ, 8УУТ – модифицированные;

– для квадратичных двадцатиузловых КЭ:

ANSYS: SOLID186(1) – стандартный, SOLID186(2) – сокращенное интегрирование;

Abaqus: C3D20 – стандартный, C3D20R – сокращенное интегрирование;

ЛОГОС-П: 20УП (простой), 20УУ (улучшенный).

Оценка численных решений осуществлялась путем их сравнения с соответствующими результатами аналитических решений по максимальным перемещениям ΔW и напряжениям $\Delta \sigma$.

Рассмотрены две задачи изгиба призматических балок длиной $L = 100$ мм и поперечным сечением $b \times h = 10 \times 10$ мм²: консольной балки, нагруженной силой на свободном конце, и шарнирно опертой балки под действием равномерно распределенной нагрузки.

Для решения задач использовались ортогональные сетки: $n_1 \times n_2 \times n_3$ размерностью от $m = 4$ ($1 \times 1 \times 4$) до $m = 131072$ ($32 \times 32 \times 128$) КЭ, где n_1, n_2, n_3 – количество элементов по высоте, по ширине сечения и по длине балки соответственно.

Некоторые результаты численных исследований сходимости различных КЭ приведены на рис. 5 и 6 в диапазоне $m = 4$ –2000. Сплошными линиями показаны кривые решений задач для консольной балки, а штриховыми – для шарнирно опертой балки. Номера кривых на рис. 6 соответствуют обозначениям кривых на рис. 5.

Из графиков видно, что для рассмотренных вариантов с увеличением размерности задачи численные решения для всех типов КЭ сходятся по перемещениям к аналитическому решению, причем наихудшую точность демонстрируют стандартные восьмиузловые КЭ SOLID185(1), C3D8 и 8УП. Более высокую точность показывают модифицированные восьмиузловые элементы SOLID185(2), C3D8I, 8УУТ и квадратичные двадцатиузловые КЭ.

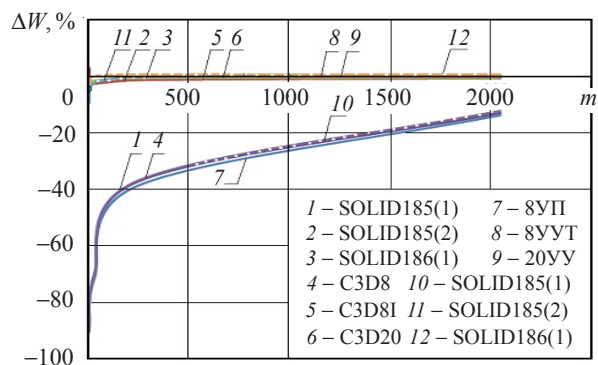


Рис. 5

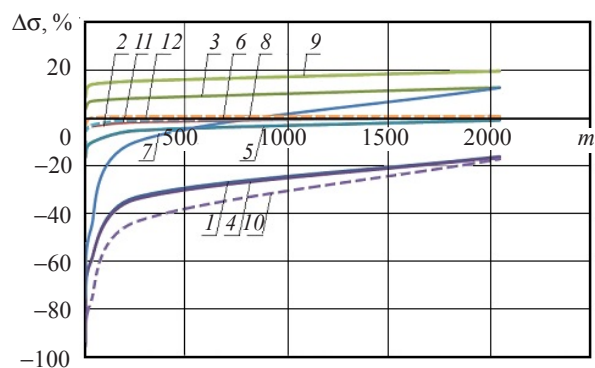


Рис. 6

Хорошую сходимость по напряжениям в обеих задачах демонстрируют восьмиузловые элементы SOLID185(2), C3D8I, 8УУТ и двадцатиузловой C3D20. В задаче шарнирной балки также быстро сходятся по напряжениям двадцатиузловые КЭ SOLID186(1) и 20УУ. Однако в задаче с консольной балкой эти элементы демонстрируют завышение напряжений по сравнению с аналитическим решением, поскольку по мере сгущения сетки КЭ все в большей степени отражают эффекты концентрации напряжений в районе жесткой заделки балки, не описываемые теорией на основе соотношений Кирхгофа – Лява.

Сходимость численных решений в задачах изгиба пластин рассмотрена на примерах расчета квадратных защемленных и шарнирно опертых пластин под равномерным давлением. Размеры пластин: $h \times l_1 \times l_2 = 5 \times 100 \times 100$ мм, где h – толщина пластины, l_1, l_2 – размеры сторон пластины. Соотношения геометрических, механических параметров и нагрузок в пластинах подбираются так, чтобы по аналитическим решениям максимальные прогибы не превышали $W_{\max}/h = 0,018$.

Моделирование проводилось на ортогональных сетках $n_1 \times n_2 \times n_3$ размерностью от $m = 16$ ($1 \times 4 \times 4$) до $m = 20480$ ($5 \times 64 \times 64$) конечных элементов, где n_1, n_2, n_3 – количество элементов по толщине, по ширине и длине пластины соответственно.

Результаты исследований сходимости численных решений в зависимости от параметра m (в диапазоне: $m = 16$ –4000) показаны на рис. 7 и 8. Сплошные линии соответствуют решениям для защемленной пластины, а штриховые линии – для шарнирно опертой пластины.

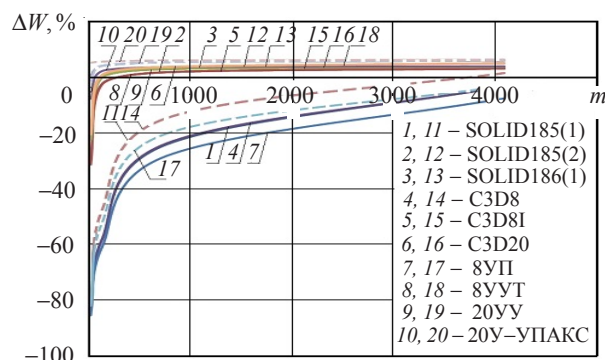


Рис. 7

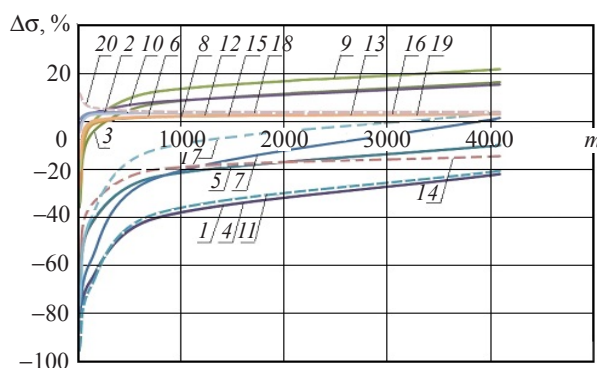


Рис. 8

Из рисунков видно, что в обеих задачах восьмиузловые элементы SOLID185(1), C3D8 и 8УП демонстрируют заметно более низкую сходимость, чем все остальные типы КЭ. На грубых сетках эти элементы дают большие погрешности при определении как перемещений, так и напряжений, по сравнению с аналитическим решением.

При определении перемещений высокую точность и хорошую сходимость в обеих задачах показывают восьмиузловые элементы SOLID185(2), SOLID185(3), C3D8I, 8УУТ, а также все двадцатиузловые элементы. При определении напряжений указанные элементы также позволяют получить хорошие результаты, однако для заделанных пластин двадцатиузловые элементы прогнозируют завышенный уровень напряжений в заделке по сравнению с аналитическим решением на основе соотношений Кирхгофа – Лява.

Также рассмотрена задача изгиба локально нагруженной квадратной пластины со смешанными граничными условиями: две кромки заделаны (показано штриховкой на рис. 10), две противоположные – шарнирно оперты. Пластина нагружена давлением, действующим на малой площадке со сторонами $l = A/24$. Для оценки точности результатов в качестве эталонного используется численное решение задачи методом конечных разностей на сетке (24×24) [20], полученное на основе теории изгиба пластин с использованием гипотез Кирхгофа – Лява.

При проведении численных расчетов на основе трех типов КЭ ANSYS использованы различные способы задания нагрузки: 1 – давление на площадке, 2 – узловые силы на площадке, 3 – сила в центре локальной площадки.

Графики сходимости численных решений для перемещений (в центре локальной площадки) и напряжений (в точке приложения нагрузки) показаны на рис. 9 и 10 соответственно.

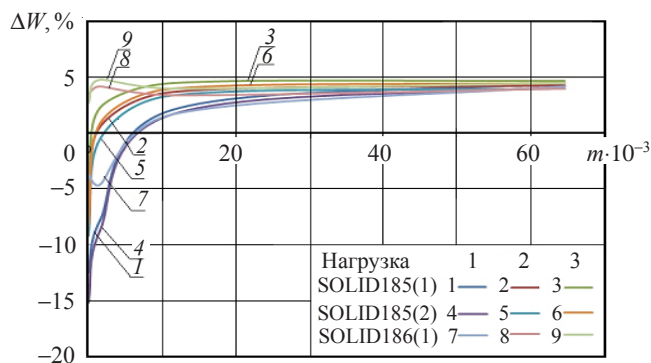


Рис. 9

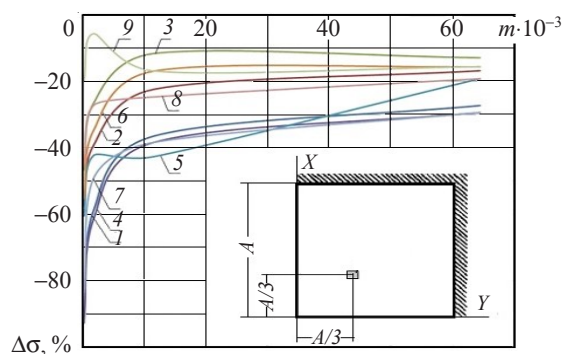


Рис. 10

Из графиков видно, что с уменьшением размеров элементов все решения с различными типами КЭ и способами задания нагрузки сходятся к прогибу в центре локальной площадки примерно на 4% выше, чем в [20]. При задании давления (способ 1) все типы элементов больше занижают напряжения, чем при задании усилий (способы 2 и 3). В целом можно отметить сходимость по напряжениям только для элементов SOLID185(2) и SOLID186(1), которые при нагружении усилием в точке (способ 3) сходятся и показывают близкий уровень напряжений примерно на 15% ниже, чем в конечно-разностном решении, приведенном в [20].

Заключение

1. Решение задачи выбора оптимальных моделей и схем КЭ-дискретизации, обеспечивающих эффективное решение всех задач расчета пространственных конструкций, находящихся в условиях изгиба, в общем виде не представляется возможным. Однако вполне реально получить оценки точности искомых результатов в зависимости от параметров дискретизации конструкций на основе используемых моделей КЭ для некоторых классов задач расчета конструкций, характеризуемых конкретными видами реализуемых видов НДС. В частности, такие оценки могут быть получены, если ограничить класс решаемых задач исследованием конструкций на основе гипотез Кирхгофа – Лява.

2. При исследовании НДС изгибаемых балок и пластин в рамках гипотез Кирхгофа – Лява эффективные модели твердотельных КЭ должны позволять точно описывать формы изгиба тонкостенных конструкций при расположении их в один слой по толщине. Поэтому простейшие КЭ с линейным и билинейным распределениями функций (типа PLANE 182, SOLID185(1) (ANSYS); C3D8 (Abaqus); 8УП (ЛОГОС-П)), не удовлетворяющие указанным условиям, не могут обеспечить высокую эффективность расчетов по сравнению с известными элементами, построенными на основе гипотез Кирхгофа – Лява.

3. При использовании других рассмотренных типов КЭ (билинейные модифицированные, квадратичные) наблюдалась хорошая точность и высокая сходимость решений при описании полей перемещений в изгибаемых пластинах. Однако определяющим фактором допустимости КЭ-решений практически для всех рассмотренных задач оказалась погрешность определения напряжений. Удовлетворительная сходимость решений по напряжениям наблюдалась для всех таких КЭ лишь вдали от границ расчетной области. В задачах с граничными условиями жесткого защемления (заделки) со всеми типами рассматриваемых твердотельных КЭ с уменьшением размеров элементов напряжения монотонно возрастают, сходимость отсутствует.

4. Отсутствие сходимости по напряжениям в отдельных локальных зонах изгибаемых пластин затрудняет выбор критерия для оценки эффективности рассматриваемых моделей КЭ. В качестве такого критерия может быть использована относительная погрешность определения напряжений рассматриваемого варианта численного решения по сравнению с аналитическим решением задачи в рамках гипотез Кирхгофа – Лява. В статье представлены материалы, позволяющие оценить оптимальные параметры дискретизации (число разбиений по толщине n , относительная длина элемента λ) в задачах изгиба балок на основе различных моделей КЭ в зависимости от относительной длины балок t при выполнении названного критерия.

5. Из сравнения результатов численного моделирования задач изгиба на основе различных моделей КЭ следует, что наиболее эффективной из рассмотренных вариантов моделей КЭ для задач изгиба пластин оказалась модель с квадратичной аппроксимацией функций перемещений и использованием схемы улучшенного интегрирования (SOLID186(2) – ANSYS; C3D20R – Abaqus; 20УУ – ЛОГОС-П; 20У–УПАКС), позволяющая использовать для получения удовлетворительного решения КЭ с наибольшей относительной длиной λ при расположении их в один слой по толщине. Близкие по точности и эффективности результаты могут быть получены на основе квадратичных моделей и стандартных схем интегрирования при значениях относительных длин КЭ $\lambda \leq 1,5-2$, однако с увеличением значений λ погрешность решений начинает резко возрастать.

Список литературы

1. ANSYS Computer Software. Version 14.03. ANSYS Inc. Canonsburg, PA. 2012.
2. Abaqus. Version 6.14. Dassault Systems, Simulia Corporation. Providence. RI. 2014.
3. Спиридонов В.Ф., Циберев К.В., Рябов А.А. и др. Пакет программ ЛОГОС. Функциональные возможности решения задач прочности. *Супервычисления и математическое моделирование: XIII Международный семинар*. Саров, 2011.
4. Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А. *Моделирование нелинейного деформирования и разрушения конструкций в условиях многофакторных воздействий на основе МКЭ*. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. 347 с.

5. Glass R.E. Sample problem manual for benchmarking of cask analysis codes. *Sandia National Laboratories Report SAND88-0190. TTC-0780.OC-71*. Albuquerque. NM. 1988.
6. Davies G.A. *Background of Benchmarks*. NAFEM Ltd. Glasgow. UK. 1993.
7. Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И. и др. *Метод конечных элементов в механике твердых тел*. Киев: Вища школа, 1982. 480 с.
8. Голованов А.И., Карнишин М.С. *Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек*. Казань: Изд-во КФТИ, 1990. 269 с.
9. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. *Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов*. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.
10. Pawsey S.F., Clough R.W. Improved numerical integration of thick shell finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1971. Vol. 3. No 4. P. 575–586.
11. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J.M. Reduced integration technique in general analysis of plate and shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1971. Vol. 3. No 2. P. 275–290.
12. Паутов А.Н. Треугольный конечный элемент для анализа изгиба пластин с учетом деформации поперечного сдвига. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем*. 1983. С. 72–77.
13. Малинин М.Ю., Снегирев В.Ф. Четырехугольный конечный элемент пологой оболочки типа Тимошенко. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем*. 1985. С. 61–65.
14. Ботенкова Л.Г., Капустин С.А., Яблонко Л.С. Изопараметрический сдвиговой элемент для анализа оболочек общего вида. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности*. 1986. С. 63–73.
15. Капустин С.А., Латухин А.Ю. и др. Точность численного интегрирования в конечных элементах с сирендиновой аппроксимацией поля перемещений. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Исследование и оптимизация конструкций*. 1987. С. 77–83.
16. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6th ed. Elsevier, 2005. 631 p.
17. Zencker U., Weber M., Wille F. Finite element mesh design of cylindrical cask under puncture drop test conditions. *PATRAM 2010*. Paper 219. London. 2010.
18. Bjorkman G.S., Molitoris D.P., Ammerman D., Broz G., Jordon J., Snow S., Tso C.-F., Yaksh M., Zencker U. Mesh convergence studies for thin shell elements developed by the ASME task group on computational modeling. *PATRAM 2010*. London. 2010.
19. Molitoris D.P., Bjorkman G.S., Chi Fung Tso, Yaksh M. Mesh convergence studies for thick shell elements developed by ASME special working group on computational modeling. *PATRAM 2013*. San-Francisco. CA. USA. 2013. DOI: 10.1115/PVP2013-97482.
20. Столяров Н.Н., Рябов А.А. К решению задач изгиба пластин методом Ричардсона с чебышевским ускорением. *Сб. Математическая физика*. Куйбышев, 1976. С. 89–95.

References

1. *ANSYS Computer Software. Version 14.03*. ANSYS Inc. Canonsburg. PA. 2012.
2. *Abaqus. Version 6.14*. Dassault Systems. Simulia Corporation. Providence. RI. 2014.
3. Spiridonov V.F., Tsiberev K.V., Ryabov A.A. et al. Paket programm LOGOS. Funktsional'nye vozmozhnosti resheniya zadach prochnosti [Computer code LOGOS. The functionality of the solution of problems of strength]. *Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie: XIII Mezhdunarodnyy seminar [XIII International Workshop "Supercomputing and Mathematical Modeling"]*. Sarov. 2011. (In Russian)
4. Kapustin S.A., Churilov Yu.A., Gorokhov V.A. *Modelirovanie nelineynogo deformirovaniya i razrusheniya konstruktsiy v usloviyakh mnogofaktornykh vozdeystviy na osnove MKE [Modeling of Nonlinear Deformation and Fracture of Structures in Terms of Multifactor Impacts Based on FEM]*. Nizhni Novgorod. UNN Publ. 2015. 347 p. (In Russian)
5. Glass R.E. Sample problem manual for benchmarking of cask analysis codes. *Sandia National Laboratories Report SAND88-0190. TTC-0780.OC-71*. Albuquerque. NM. 1988.
6. Davies G.A. *Background of Benchmarks*. NAFEM Ltd. Glasgow. UK. 1993. P. 139.
7. Sakharov A.S., Kislooky V.N., Kirichevsky V.V., Altenbakh I. et al. *Metod konechnykh*

elementov v mekhanike tverdykh tel [The Finite Element Method in the Mechanics of Solids]. Kiev. Vischa shkola Publ. 1982. 480 p. (In Russian)

8. Golovanov A.I., Karnishin M.S. *Vvedenie v metod konechnykh elementov statiki tonkikh obolochek [Introduction to the Finite Element Method for Static of Thin Shells]*. Kazan. KFTI Publ. 1990. 269 p. (In Russian)

9. Obratsov I.F., Saveliev L.M., Khazanov K.S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki letatel'nykh apparatov [The Finite Element Method in Construction Mechanics Problems for Aircraft]*. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 1985. 392 p. (In Russian).

10. Pawsey S.F., Clough R.W. Improved numerical integration of thick shell finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1971. Vol. 3. No 4. P. 575–586.

11. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J.M. Reduced integration technique in general analysis of plate and shells. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1971. Vol. 3. No 2. P. 275–290.

12. Pautov A.N. Treugol'nyy konechnyy element dlya analiza izgiba plastin s uchetom deformatsii poperechnogo sdviga [A triangular finite element for analysis of bending plates considering shear deformation]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Statika i dinamika deformiruemyykh sistem [Application Problems of Strength and Plasticity. Statics and Dynamics of Deformable Systems]*. 1983. P. 72–77 (In Russian).

13. Malinin M.Yu., Snegirev V.F. Chetyrekhugol'nyy konechnyy element pologoy obolochki tipa Timoshenko [Quadrangular finite element for shallow shell of Timoshenko type]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Statika i dinamika deformiruemyykh sistem [Application Problems of Strength and Plasticity. Statics and Dynamics of Deformable Systems]*. 1985. P. 61–65 (In Russian).

14. Botenkova L.G., Kapustin S.A., Yablonko L.G. Izoparametricheskyy sdvigovoy element dlya analiza obolochek obshchego vida [Isoparametrical shear element to analysis of the general form of shells]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Metody resheniya zadach uprugosti i plastichnosti [Application Problems of Strength and Plasticity. Methods for Solving Problems of Elastic and Plasticity]*. 1986. P. 63–73 (In Russian).

15. Kapustin S.A., Latukhin A.Yu. et al. Tochnost' chislennogo integrirovaniya v konechnykh elementakh s sirendipovoy approksimatsiey polya peremeshcheniy [The accuracy of the numerical integration of finite elements with sirendipov approximation of the displacement field]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Issledovanie i optimizatsiya konstruksiy [Application Problems of Strength and Plasticity. Research and Optimization of Structures]*. 1987. P. 77–83 (In Russian).

16. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6th ed. Elsevier. 2005. 631 p.

17. Zencker U., Weber M., Wille F. Finite element mesh design of cylindrical cask under puncture drop test conditions. *PATRAM 2010*. Paper 219. London. 2010.

18. Bjorkman G.S., Molitoris D.P., Ammerman D., Broz G., Jordon J., Snow S., Tso C.-F., Yaksh M., Zencker U. Mesh convergence studies for shell elements developed by the ASME task group on computational modeling. *PATRAM 2010*. London. 2010.

19. Molitoris D.P., Bjorkman G.S., Chi Fung Tso, Yaksh M. Mesh convergence studies for thick shell elements developed by ASME special working group on computational modeling. *PATRAM 2013*. San-Francisco. CA. USA. 2013. DOI: 10.1115/PVP2013-97482.

20. Stoliarov N.N., Ryabov A.A. K resheniyu zadach izgiba plastin metodom Richardsona s chebyshevskim uskoreniem [To the solution of problems of bending of plates by the method of Richardson with Chebyshev acceleration]. *Sb. "Matematicheskaya fizika" [Collection "Mathematical Physics"]*. Kuibyshev. 1976. P. 89–95 (In Russian).

**USING SOLID FINITE ELEMENTS
IN BENDING PROBLEMS OF BEAMS AND PLATES**

Kapustin S.A.¹, Churilov Yu.A.¹, Ryabov A.A.², Romanov V.I.², Plakunov D.A.²

¹*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

²*Sarov Engineering Center, Nizhni Novgorod region, Diveevo district,
Satis, Russian Federation*

The issues of effectively using solid finite element models for analyzing bending problems of beams and plates are considered. A concise review of some works and theoretical assessment of the applicability of solid finite elements for describing the stress-strain state of thin-walled structural elements is given. Recommendations are formulated for the choice of solid FE models for analyzing bending problems of thin-walled structures, which can be as effective as plate and shell elements based on Kirchhoff – Love relations.

Results of numerically investigating the effect of finite-element discretization parameters on the accuracy of the stress-strain state analysis of bending plates are given as a function of the number of discretizations along the thickness and relative thicknesses of the plates using various solid FE models. Recommendations are formulated for choosing discretization parameters for various solid FE models for a given inaccuracy in determining stresses.

The results of studying the accuracy and convergence of numerical solutions of bending problems of beams and plates for various loading conditions are presented, as obtained using various solid FE models implemented in ANSYS, Abaqus, LOGOS-P, UPAKS programs.

Keywords: solid-state finite elements, bending, beams, plates.