

УДК 539.3

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ТРИБОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ГРАДИЕНТНЫМИ УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ^{*)}

С.М. Айзикович¹, Т.В. Игнатьева², А.В. Наседкин²

¹Донской государственной технической университет,

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Рассмотрена контактная задача о внедрении осесимметричного сферического жесткого штампа в полупространство с градиентным упругим покрытием. Для решения задачи в осесимметричной постановке использован метод конечных элементов, реализованный в программном комплексе ANSYS на языке APDL. Численные результаты основных контактных характеристик (напряжений и смещений) проанализированы для характерных законов неоднородности покрытия. Из них два закона соответствуют случаю, когда градиент упругих свойств покрытия меняет знак.

Проведено исследование погрешности конечно-элементного моделирования путем сравнения численных результатов с полученными для этой задачи аналитическими результатами. Показано, что при выполнении определенных условий погрешность метода конечных элементов составляет 4–12%.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, метод конечных элементов, неоднородные упругие среды, функционально-градиентные покрытия.

Введение

Покрытия с плавно изменяющимися по глубине упругими свойствами, так называемые градиентные или функционально-градиентные покрытия (ФГП), дают возможность избежать концентрации напряжений в зоне сопряжения с упругой подложкой и, тем самым, увеличить временной ресурс работоспособности покрытия. Разработанные ранее математические модели слоистых материалов [1–3] недостаточно точно описывают ФГП, наблюдаются как количественные, так и качественные отличия в поведении функционально-градиентных материалов по сравнению с однородными или слоистыми [4].

Среди неоднородных покрытий с плавно изменяющимися по глубине упругими свойствами особый интерес представляют ФГП, у которых градиент изменения упругих свойств меняет знак по одной из координат. Так, например, это покрытия, жесткость которых на поверхности максимальна и уменьшается с глубиной до некоторого значения, а затем, наоборот, увеличивается по мере приближения к под-

^{*)} Выполнено при поддержке РФФИ (проекты 07-08-00730-а, 08-01-00003-а, 08-08-90033-Бел, 08-08-00853-а, 08-08-00873-а, 09-08-01141-а)

ложке (покрытия с немонотонными законами изменения упругих свойств). Такие покрытия, сочетающие высокую прочность одних слоев с вязкостью и пластичностью других, приспособлены для работы изделий в экстремальных механических и тепловых условиях.

В связи со сложностями математического моделирования градиентных сред в большинстве известных публикаций исследовались слоистые (или кусочно-однородные) материалы.

В зависимости от степени отличия упругих свойств покрытия и основания, или от градиента упругих свойств в функционально-градиентном материале, напряжения внутри материала имеют разный характер. Например, в работах [5, 6] авторами показано, что для некоторых материалов и условий работы самые высокие растягивающие напряжения появляются в зоне контакта покрытия с подложкой, а не на поверхности покрытия. В статье [7] показано, что даже небольшое несоответствие в упругих свойствах покрытия и подложки значительно изменяет положение и величину максимума главного растягивающего напряжения вне зоны контакта. Упругое поле для герцевского контакта изотропных тел впервые было найдено в [8] для случая нормального нагружения. Метод построения упругих полей в полупространстве в случае круговой области контакта дан в [9]. В замкнутой форме выражение для полей напряжений было получено в [10]. В [11] приведено в осесимметричной формулировке решение задачи для характерной поверхностной нагрузки, приложенной к упругой однослойной среде, одновременно как для случая слоя, лежащего без трения, так и для полностью сцепленного с подложкой, а также для двухслойной среды в случае полного сцепления между слоями. В статье [12] обобщены результаты, полученные в [11], на случай неосесимметричной нагрузки, приложенной к одно- и двухслойной упругим средам. В работах [13, 14] представлен метод, который позволяет найти точное решение для полей смещений и напряжений в полупространстве с однородным покрытием под действием приложенной к поверхности покрытия нормальной нагрузки, распределенной по герцевскому закону. Авторами [15] проведено конечно-элементное моделирование сферического индентирования жесткого покрытия на мягких подложках с применением средств конечно-элементного пакета ABAQUS.

Ряд исследований был проведен и для функционально-градиентных покрытий. В [16] построены поля напряжений и деформаций для экспоненциального закона неоднородности в полупространстве с использованием метода конечного элемента. Воздействие вдоль поверхности неоднородного полупространства моделировалось нагрузкой, соответствующей распределению контактных давлений под жестким сферическим индентором, внедряемым в однородное полупространство, для классической задачи Герца. ФГП с экспоненциальным изменением упругих свойств покрытия также рассматривались в статье [17]. Авторами был проведен сравнительный анализ градиентного и однородного покрытий при рассмотрении полей напряжений и деформаций, вычисляемых аналитически. Для двумерной задачи ФГП с изменяющимся по экспоненциальному закону модулем сдвига и постоянным коэффициентом Пуассона были исследованы в [18]. Нагрузка обеспечивалась скользящим жестким штампом под действием нормальной и касательной сил с учетом трения. Гармонический закон изменения модуля сдвига по глубине покрытия был рассмотрен в осесимметричной задаче индентирования круговым жестким штампом [19]. Решения задач в [18, 19] были получены аналитическими методами. Случай произволь-

ного изменения упругих свойств покрытия по глубине для двумерной задачи был реализован в работе [20], где исследовалось покрытие под действием нормальной концентрированной нагрузки и под действием инденторов различной формы. Основываясь на кусочно-линейной аппроксимации, функционально-градиентное покрытие разбивалось на группу подслоев. При этом на каждом подслое модуль сдвига приближался линейной функцией, а коэффициент Пуассона сохранялся постоянным.

В настоящей статье исследуются возможности использования метода конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе ANSYS для задач контактного взаимодействия в случае осесимметричных трибомеханических систем с градиентными упругими свойствами. Упругие свойства меняются по глубине покрытия согласно нескольким характерным законам, в том числе с монотонными и синусоидальными законами неоднородности. Точность расчетов по МКЭ оценена путем сравнительного анализа конечно-элементных результатов с результатами, полученными аналитически в [4, 21–23].

1. Постановка задачи

Пусть жесткий недеформируемый сферический индентор вдавливается в поверхность Γ неоднородного упругого полупространства Ω силой P (рис. 1). С полупространством свяжем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) так, что $\Omega = \{0 \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z \leq 0\}$. Предполагается, что все деформации упруги и размер зоны контакта a мал по сравнению с радиусом R сферы, описывающей форму индентора. Силы трения между индентором и поверхностью полупространства отсутствуют.

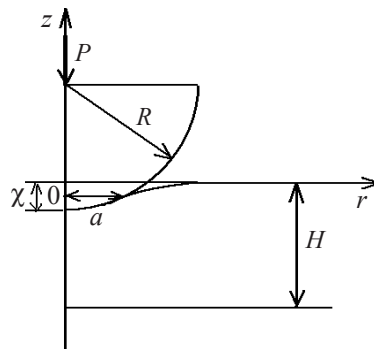


Рис. 1

Считаем, что в окрестности начальной точки контакта $\{r = 0, z = 0\}$ форму сферического индентора можно аппроксимировать следующим образом:

$$z = \psi(r) = \beta r^2, \quad \beta = \frac{1}{2R}. \quad (1.1)$$

Аппроксимация (1.1) для однородных тел была обоснована в [4] для малого радиуса контакта $a < R/10$.

Примем, что модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν в верхнем слое $-H < z \leq 0$ являются функциями координаты z : $E = E(z)$, $\nu = \nu(z)$. При этом для больших глубин $z \leq -H$ значения упругих модулей постоянны: $E(z) = E(-H) = \text{const}$, $\nu = \nu(-H) = \text{const}$. На поверхности $z = 0$ для рассматриваемой задачи имеем граничные условия

$$\begin{aligned} w = \chi - \psi(r), \quad r < a; \quad \sigma_z = 0, \quad r \geq a, \\ \tau_{zr} = \tau_{z\varphi} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

а при $(r, -z) \rightarrow \infty$ смещения и напряжения должны стремиться к нулю. Здесь w – смещение вдоль оси z ; σ_z – нормальные напряжения; $\tau_{rz}, \tau_{z\varphi}$ – тангенциальные напряжения; χ – осадка индентора в направлении $(-z)$.

Для определения осадки штампа используется интегральное граничное условие

$$2\pi \int_0^a q(r)r dr = P, \quad (1.3)$$

где $q(r)$ – контактные нормальные напряжения, $q(r) = \sigma_z(r, 0)$, $0 \leq r \leq a$.

Так как края индентора являются гладкими, то на границе зоны контакта выполняется соотношение $q(r) = 0$, которое является условием для определения полуширины зоны контакта a и накладывает некоторые ограничения на функцию $q(r)$. Заметим, что в связи с отсутствием сцепления индентора с поверхностью полупространства для корректной постановки задачи должно быть выполнено соотношение $q(a) \leq 0$ для всех $r \leq a$.

В данной задаче основными неизвестными величинами являются: распределение контактных нормальных напряжений $q(r)$ под штампом, размер зоны контакта a , связь между вдавливающей силой P и осадкой штампа χ , а также форма осадки поверхности основания вне штампа.

2. Решение задачи методом парных интегральных уравнений

Решение классической задачи Герца для однородного полупространства хорошо известно, см., например, [24]. В [2, 3] постановка классической задачи Герца была обобщена на случай, когда сферический индентор вдавливается в слой, лежащий на недеформируемом основании или на однородном полупространстве, имеющем упругие свойства, отличные от упругих свойств слоя.

Для рассматриваемой здесь задачи с функционально-градиентными упругими модулями основания, используя методы операционного исчисления, можно получить парное интегральное уравнение следующего вида [25]:

$$\begin{cases} \int_0^\infty Q(\alpha) L(\lambda\alpha) J_0(\alpha\tilde{r}) d\alpha = \theta(0)\phi(\tilde{r}), & 0 \leq \tilde{r} \leq 1, \\ \int_0^\infty Q(\alpha) J_0(\alpha\tilde{r}) \alpha d\alpha = 0, & \tilde{r} > 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$Q(\alpha) = \int_0^1 q(\rho) J_0(\alpha\rho) \rho d\rho, \quad (2.2)$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка; $\theta(z) = E(z)/[2(1-\nu^2(z))]$; $\tilde{r} = r/a$, $0 \leq \tilde{r} \leq 1$; $\phi(\tilde{r}) = \delta - \psi(\tilde{r}a)/a$; $\delta = \chi/a$; $\psi(\tilde{r}a) = \beta a^2 \tilde{r}^2$; $\lambda = H/a$ – характерный геометрический параметр задачи, $L(\lambda\alpha)$ – трансформанта ядра парного интегрального уравнения.

В общем случае функция $L(\lambda\alpha)$ строится численно с использованием метода модулирующих функций, так же, как в [23]. Если функция $\theta(z)$ на полуоси $z \in$

$\in (-\infty, 0]$ положительна, ограничена и $\theta(z) \rightarrow \text{const}$ при $z \rightarrow -\infty$, то можно показать [25], что трансформанта ядра $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$L(\alpha) = A + \gamma_1 |\alpha| + O(\alpha^2), \quad \alpha \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

$$L(\alpha) = 1 + \gamma_2 |\alpha|^{-1} + O(\alpha^{-2}), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

где

$$A = \lim_{z \rightarrow -\infty} \theta(0) / \theta(z);$$

γ_1, γ_2 – постоянные. Для многослойных материалов аналогичные свойства были отмечены в [26].

Приближенное аналитическое решение парного интегрального уравнения задачи можно получить с помощью аппроксимации $L(\alpha)$ дробно-рациональным выражением $L_N(\alpha) = \prod_{i=1}^N [(\lambda^2 \alpha^2 + A_i^2) / (\lambda^2 \alpha^2 + B_i^2)]$ и методов операционного исчисления [23]. В результате распределение контактных нормальных напряжений под сферическим индентором будет описываться формулой

$$q(\tilde{r}) = \frac{2a}{\pi R} \theta(0) \left[2L_N^{-1}(0) \sqrt{1 - \tilde{r}^2} + \sum_{i=1}^N C_i A_i \lambda^{-1} \int_{\tilde{r}}^1 \frac{\text{sh}(A_i \lambda^{-1} t)}{\sqrt{t^2 - \tilde{r}^2}} dt \right], \quad 0 \leq \tilde{r} \leq 1, \quad (2.5)$$

где коэффициенты C_i находятся из решения линейной алгебраической системы уравнений [23]. Выражение для вдавливающей силы определяется из условия равновесия штампа (1.3) и имеет вид

$$P = \frac{4a^3}{R} \theta(0) \left\{ \frac{2}{3} L_N^{-1}(0) + \sum_{i=1}^N C_i A_i \lambda^{-1} [-\text{ch}(A_i \lambda^{-1}) + A_i \lambda^{-1} \text{sh}(A_i \lambda^{-1})] \right\}. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.1) подробно исследовано в [28, 29]. В этих работах было показано, что приближенное решение вида (2.5) является двухсторонне асимптотически точным при $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$.

3. Конечно-элементное моделирование в ANSYS

Для конечно-элементного решения рассматриваемой осесимметричной задачи в пакете ANSYS были построены модели меридионального сечения. Задача решалась в безразмерной постановке, при которой геометрические параметры и перемещения были отнесены к толщине слоя-подложки H , то есть $H = 1$; напряжения и модули жесткости – к значению модуля Юнга $E^S = \text{const}$ однородного подстилающего полупространства, то есть $E^S = 1$, а сила вдавливания P – к значению E^S / H^2 . Полупространство в меридиональном сечении было ограничено областью $\tilde{r} \in [0, L]$, $\tilde{z} \in [-B, 0]$, $\tilde{z} = z / H$. Для обеспечения точности результатов дополнительно была выделена приконтактная зона $\tilde{r} \in [0, L_c]$, ($L_c < L$), $\tilde{z} \in [-H, 0]$. При расчетах размеры H и L_c были фиксированы ($H = 1, L_c = 2$), а размеры расчетной области варьировались $L \in [10, 60]$, $B \in [6, 31]$. Моделируемая область подразделялась на четырехугольные восьмиузловые конечные элементы ANSYS PLANE82 серендипова типа с опцией осесимметричности, причем в приконтактной зоне формировалось каноническое разбиение на прямоугольные элементы. Густота разбиения определялась следующими параметрами: n_{cr} – число элементов в приконтактной зоне в радиальном направлении, n_{cz} – число элементов в приконтактной зоне по толщине, n_{LB} – число элементов во внеконтактной зоне в радиальном направлении

и по толщине, m – масштабный множитель, определяющий размер увеличения элементов во внеконтактной зоне при удалении их от контактной зоны. Данные параметры также варьировались: $n_{cr} \in [30, 90]$, $n_{cz} \in [15, 45]$, $n_{LB} \in [10, 100]$, $m \in [10, 30]$. Наиболее грубый вариант конечно-элементной сетки при $n_{cr} \in 30$, $n_{cz} \in 15$, $n_{LB} = m = 10$ показан на рис. 2.

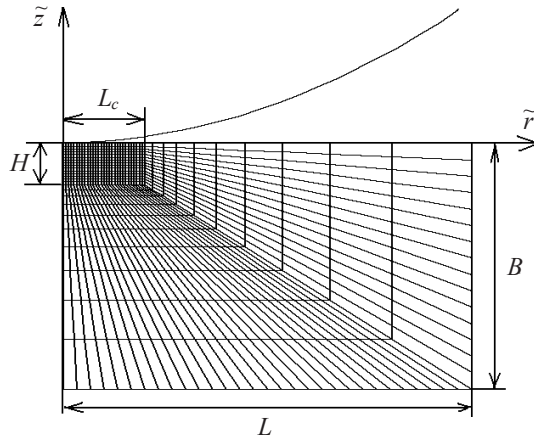


Рис. 2

В соответствии с указанным выше, изменение модуля Юнга по глубине \tilde{z} моделировалось по зависимостям $E_i^C / E^S = f_i(\tilde{z})$, где i – номер функциональной зависимости, $f_i(\tilde{z})$ – закон изменения модуля Юнга по толщине покрытия H . Для больших глубин упругие характеристики считались постоянными ($E_i^C / E^S = 1$, $\tilde{z} \leq -H$).

В качестве $f_i(z)$ рассматриваются следующие зависимости:

- случай однородного основания $f_0 = 1$;
 - постоянные функции $f_1 = 3,5$ и $f_2 = 1/3,5$, что соответствует двухслойному основанию;
 - монотонные функции $f_3 = 3,5 + 2,5z/H$ и $f_4 = 1/3,5 - (2,5/3,5)z/H$;
 - синусоидальные функции $f_5 = 1 - 2,5 \sin(\pi z/H)$ и $f_6 = 1 + (2,5/3,5) \sin(\pi z/H)$,
- где градиент упругих свойств меняет знак.

Коэффициент Пуассона всюду считался постоянной величиной $\nu = 1/3$.

Следует отметить, что с использованием специальных макросов APDL ANSYS было обеспечено формирование конечных элементов PLANE82 с различными постоянными значениями модулей Юнга, равными значениям функций $E_i^C(\tilde{z})/E^S$ в центральных точках элементов. Таким образом, функциональные зависимости модуля Юнга аппроксимировались кусочно-постоянными функциями со значениями $f_i(z)$ в центральных точках элементов.

Контактное взаимодействие моделировалось элементами CONTA175 и TARGE169. Контактные элементы CONTA175 покрывали границу $\tilde{z} = 0$, а ответные элементы TARGE169 задавались как недеформируемая поверхность параболической формы (1.1) при безразмерном радиусе $R_S = R/H$ (случай для $R_S = 15$ показан на рис. 2).

Для расчетной модели было принято, что нижняя часть основания $\tilde{z} = -B$ жестко закреплена; к контрольному узлу ($\tilde{r} = 0$, $\tilde{z} = 0$) ответной поверхности штампа приложена нормальная сила P , направленная противоположно оси \tilde{z} ; для штампа

допускалось перемещение только по оси \tilde{z} . Для оценки точности конечно-элементных расчетов и выбора параметров проведено сравнение результатов для случая $f_0 = 1$ с решением Герца для однородного полупространства. Так, по классическим формулам для однородного полупространства можно оценить контактное напряжение $q(0)$, осадку штампа χ и зону контакта a :

$$q(0) = \frac{3P}{2\pi a^2}, \quad \chi = \frac{a^2}{R}, \quad a = \sqrt[3]{\frac{3PR}{4E_*}}, \quad E_* = \frac{E}{(1-\nu^2)}. \quad (3.1)$$

Для варьирования параметров области и конечно-элементного разбиения выберем две основные величины: размер области по радиусу L и число элементов в приконтактной зоне n_{cr} . Остальные геометрические характеристики конечно-элементного разбиения свяжем с этими двумя параметрами следующим образом: $B = L/2 + H$, $n_{cr} = n_{cr}/2$, $n_{LB} = [L]$, $m = n_{LB}$.

Результаты расчетов при различных параметрах области и конечно-элементного разбиения приведены в табл. 1, где через $\varepsilon_G(F) = 100|F - F_G|/F_G$ обозначается относительная погрешность в процентах для величин F из (3.1).

Таблица 1

№	L	n_{cr}	$\varepsilon_G(q(0))$	$\varepsilon_G(\chi)$	$\varepsilon_G(a)$
1	10	30	1,02	4,7	12
2	20	30	0,90	2,6	12
3	30	30	0,82	1,8	12
4	40	30	0,77	1,4	12
5	50	30	0,72	1,1	12
6	60	30	0,69	1,0	12
7	60	60	0,18	1,0	5,6
8	60	90	0,07	1,0	3,4

Как видно из табл. 1, наилучшая точность получается для максимальных контактных напряжений $q(0)$: даже для самого грубого разбиения и малой расчетной области относительная погрешность $\varepsilon_G(q(0)) \approx 1\%$. Точность определения осадки штампа χ зависит прежде всего от величины $B = L/2 + H$ расчетной области и монотонно увеличивается с ростом толщины B . Это вполне естественно, так как аналитическое значение осадки получено для неограниченного полупространства, и ограничение расчетной области по толщине с условием закрепления нижней границы дает большие жесткостные ограничения для возможности смещений по оси \tilde{z} . Наибольшая погрешность получается в определении зоны контакта a . Здесь основным параметром является размер конечных элементов в радиальном направлении, и погрешность $\varepsilon_G(a)$ монотонно уменьшается лишь с ростом числа элементов n_{cr} в контактной зоне. Хотя обычно перемещения в МКЭ определяются лучше, чем напряжения, здесь размер зоны контакта не является чисто геометрической величиной, так как зависит от радиуса штампа, силы вдавливания, числа и типа конечных элементов и т.п.

4. Сравнительный анализ аналитического и конечно-элементного методов для неоднородного основания

Для выяснения эффективности метода конечных элементов для функционально-градиентной среды проводился сравнительный анализ полученных в ANSYS результатов и аналитических (точнее, численно-аналитических) результатов из [4].

Поля напряжений и смещений вычислялись для шести характерных законов неоднородности покрытия при различных параметрах λ . Трудность сравнения заключалась в том, что зону контакта a в ANSYS невозможно задать заранее, так как она становится известной только после решения задачи. Поэтому нужное значение зоны контакта a определялось из серии вычислительных экспериментов путем задания различных значений силы P . После получения нужной зоны контакта проводилось сравнение в нескольких точках основания величин нормальных и радиальных напряжений, отнесенных к E^S и обозначаемых через $\sigma_z(\tilde{r}, \tilde{z})$ и $\sigma_r(\tilde{r}, \tilde{z})$ соответственно. В этих же точках проводилось сравнение вертикальных и радиальных смещений под штампом, обозначаемых $w(\tilde{r}, \tilde{z})$ и $u(\tilde{r}, \tilde{z})$ соответственно. Особый интерес представляет случай $\lambda = 1$, когда толщина неоднородного покрытия и радиус зоны контакта равны.

В табл. 2 приведены значения относительных погрешностей $\varepsilon(F)$ напряжений и смещений для конечно-элементного и аналитического метода решения задачи для зоны контакта $\lambda = 1$ при $L = 10$ и $n_{cr} = 30$. Относительные погрешности вычислялись в точках приповерхностного слоя $\tilde{z} = -0,01$, $\tilde{r} \in [0, 0,8]$, причем в табл. 2 сведены средние значения относительных погрешностей, где i – номер закона неоднородности.

Таблица 2

i	$\varepsilon(\sigma_z), \%$	$\varepsilon(\sigma_r), \%$	$\varepsilon(w), \%$	$\varepsilon(u), \%$
1	6,1	10,0	5,6	6,2
2	1,6	11,0	4,5	5,4
3	7,5	8,1	4,8	5,7
4	4,5	11,2	6,2	3,9
5	1,6	3,6	7,7	9,2
6	6,8	11,0	2,5	6,2

Как видно из табл. 2, относительная ошибка в среднем составляет 6% и не превосходит 12% (причем наибольшая погрешность имеется для радиальных напряжений), что свидетельствует о приемлемой точности вычислений. Следует заметить, что для всех случаев неоднородности наибольшая близость к аналитическим результатам достигается вблизи точки контакта, а по мере удаления от нее относительная погрешность возрастает, но там и сами значения анализируемых величин уменьшаются.

Постпроцессорная обработка результатов конечно-элементных расчетов позволяет легко получать все важнейшие характеристики решения. Так, на рис. 3 показаны графики контактных напряжений для шести законов неоднородности полученных в постпроцессоре ANSYS для $L = 60$ и $n_{cr} = 90$. Как видно из рис. 3, для более жестких подложек (кривые 1, 3, 5) напряжения в зоне контакта существенно увеличиваются, а зона контакта уменьшается по сравнению с однородным основанием (кривая 0), а для более мягких подложек – наоборот. Следует отметить, что даже при существенно различных законах неоднородности графики контактных напряжений могут быть близкими (кривые 4 и 6). Данное обстоятельство может оказаться важным для обратных задач при определении законов неоднородностей по результатам наноиндентирования.

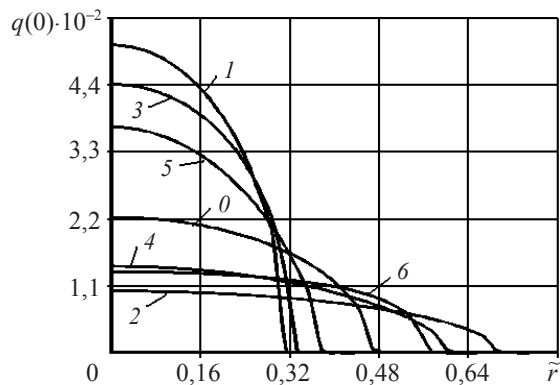


Рис. 3

По результатам расчетов можно сделать также следующие выводы. Для каждого из шести рассматриваемых законов неоднородности наибольшая концентрация напряжений достигается в различных частях покрытия. Так, для жесткого однородного покрытия наибольшая концентрация достигается в зоне сопряжения покрытия с подложкой, для монотонных законов неоднородности наибольшая интенсивность наблюдается в середине покрытия. Для синусоидальных законов неоднородности наибольшая концентрация напряжений достигается внутри покрытия, в случае E_5^C – ближе к поверхности, а в случае E_6^C – ближе к подложке. Таким образом, анализ численно-аналитических и конечно-элементных результатов позволяет сделать заключение, что в случае градиентных сред их поведение отлично от однородных при любых размерах зоны контакта. В частности, даже для очень малых зон контакта характер взаимодействия сферического индентора с основанием, представляющим собой упругое полупространство с функционально-градиентным покрытием, отличается от характера взаимодействия сферического индентора с однородным полупространством.

Литература

1. Попов, Г.Я. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта / Г.Я. Попов // ПММ. – 1962. – Т. 26, вып. 1. – С. 152–164.
2. Потележко, В.П. Контактная задача для плиты, лежащей на упругом основании / В.П. Потележко, А.П. Филиппов // Прикл. механика. – 1967. – Т. 3, вып.1. – С. 87–91.
3. El-Sherbiny, M.G.D. The Hertzian contact of surfaces covered with metallic films / M.G.D. El-Sherbiny, J. Halling // Wear. – 1976. – V. 40, №3. – P. 325–337.
4. Внедрение сферического индентора в полупространство с функционально-градиентным упругим покрытием / С.М. Айзикович и [др.] // Докл. РАН. – 2008. – Т. 418, №2. – С. 186–192.
5. Gupta, P.K. Contact stress between an elastic cylinder and a layered elastic solid / P.K. Gupta, J.A. Walowit // ASME J. of Lubrication Technology. – 1974. – V.94. – P. 250–257.
6. Leroy, J.M. Stress determination in elastic coating and substrate under both normal and tangential loads / J.M. Leroy, B. Villechaise: In Mechanics of coatings / D. Dowson, C.M. Taylor, M. Godet, eds. – New York: Elsevier, 1990. – P. 195–201.
7. King, R.B. Sliding contact stresses in a two-dimensional layered elastic half-space / R.B. King, T.C. O'Sullivan // Int. J. Solid & Struct. – 1987. – V. 23, №5. – P. 581–597.
8. Huber, M.T. Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper / M.T. Huber // Annalen der Physik. – Leipzig, Germany. – 1904. – V. 14. – S. 153–163.
9. Kalker, J.J. The transmission of a force and couple between two elastically similar rolling spheres / J.J. Kalker // Proc. KNAW. – Amsterdam. – 1964. – B67. – P. 45–75.

10. *Sackfield, A.* A note of the Hertz contact problem: a correlation of standard formulae / A. Sackfield, D. Hills // *J. Strain Analysis*. – 1983. – V. 18. – P. 195–197.
11. *Burmister, D.M.* The general theory of stresses and displacements in layered systems / D.M. Burmister // *J. Appl. Phys.* – 1945. – V. 16. – P. 89–94, 126–127, 296–302.
12. *Chen, W.T.* Computation of stress and displacement in a layered elastic medium / W.T. Chen // *Int. J. Eng. Sci.* – 1971. – V. 9. – P. 775–800.
13. *Schwarzer, N.* The elastic field in coated half-space under Hertzian stress distribution / N. Schwarzer, F. Richter, G. Hecht // *Surface and Coatings Technology*. – 1999. – V. 114. – P. 292–304.
14. *Schwarzer, N.* Arbitrary load distribution on a layered half-space / N. Schwarzer // *ASME Trans. J. of Tribology*. – 2000. – V. 122. – P. 672–681.
15. *Vanimisetty Sampath, K.* A numerical analysis of spherical indentation response of thin hard films on soft substrates / K. Vanimisetty Sampath, R. Narasimhan // *Int. J. Solid & Struct.* – 2006. – V. 43. – P. 6180–6193.
16. *Giannakopoulos, A.E.* Indentation of solids with gradients in elastic properties: Part I. Point force; Part II. Axially symmetric indenters / A.E. Giannakopoulos, S. Suresh // *Int. J. Solid & Struct.* – 1997. – V. 34, №19. – P. 2357–2428.
17. *Kashalyan, M.* Three-dimensional elastic deformation of a functionally graded coating / substrate system / M. Kashtalyan, M. Menshykova // *Int. J. Solid & Struct.* – 2007. – V. 44. – P. 5272–5288.
18. *Guler, M.A.* Contact mechanics of graded coatings / M.A. Guler, F. Erdogan // *Int. J. Solid & Struct.* – 2004. – V. 41. – P. 3865–3889.
19. *Selvadurai, P.S.* Axisymmetric mixed boundary value problems for an elastic halfspace with a periodic nonhomogeneity / P.S. Selvadurai, Q. Lan // *Int. J. Solid & Struct.* – 1998. – V. 35. – P. 1813–1826.
20. *Ke, L.* Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties / L. Ke, Y. Wang // *Int. J. Solid & Struct.* – 2006. – V. 43. – P. 5779–5798.
21. *Aizikovich, S.M.* Stresses at the interface between the functionally graded coating and the elastic half-space caused by spherical indentation / S.M. Aizikovich, L.I. Krenev, I.S. Trubchik // *Key Engineering Materials*. – 2007. – V. 345–346. – P. 833–836. (Online at <http://www.scientific.net>).
22. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties / S.M. Aizikovich [et al.] // *Int. J. Solid & Struct.* – 2002. – V. 39, № 10. – P. 2745–2772.
23. *Айзикович, С.М.* Асимптотическое решение задачи о внедрении сферического индентора в неоднородное по глубине полупространство / С.М. Айзикович, Л.И. Крнев, И.С. Трубчик // *Изв. РАН. МТТ*. – 2000. – №5. – С.107–117.
24. *Giannakopoulos, A.E.* Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials / A.E. Giannakopoulos, P. Pallot // *J. Mech. & Phys. Solids*. – 2000. – V. 48. – P.1597–1631.
25. *Айзикович, С.М.* Осесимметричная задача о вдавливании круглого штампа в упругое, неоднородное по глубине полупространство / С.М. Айзикович, В.М. Александров // *Изв. АН СССР. МТТ*. – 1984. – Т. 39, №2. – С. 73–82.
26. *Приварников, А.К.* Пространственная деформация многослойного основания / А.К. Приварников // В сб.: Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1973. – С. 27–45.
27. *Айзикович, С.М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред / С.М. Айзикович // *ПММ*. – 1982. – Т. 46, вып. 1. – С. 148–158.
28. *Айзикович, С.М.* Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при малых значениях параметра / С.М. Айзикович // *ДАН СССР*. – 1990. – Т. 313, №1. – С. 48–52.
29. *Айзикович, С.М.* Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при больших значениях параметра / С.М. Айзикович // *Докл. АН СССР*. – 1991. – Т. 319, №5. – С. 1037–1041.

[13.07.2009]

**FINITE-ELEMENT SIMULATION OF CONTACT INTERACTION
FOR A TRIBOMECHANICAL SYSTEM
WITH GRADED ELASTIC PROPERTIES**

S.M. Aizikovich , T.V. Ignat'eva, A.V. Nasedkin

A contact problem of penetration of an axisymmetrical spherical rigid indenter into a half-space with graded elastic coating is studied. The axisymmetric formulation of the problem is analyzed using the FEM implemented in the ANSYS software complex in APDL. The numerical results for the main contact characteristics (stresses and displacements) are analyzed for the characteristic laws of inhomogeneity of the coating. Two of the laws correspond to the case where the gradient of elastic properties of the coating alternates its sign.

The inaccuracy of the FE simulation is assessed by comparing the numerical results with the analytical ones obtained for this problem. The inaccuracy of the FE simulation is shown to be 4–12% if certain conditions are met.

Key words: contact interaction, FEM, inhomogeneous elastic media, functionally graded coatings.