

УДК 539.3

ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЯХ ТОЛСТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ ПОЛИМЕРНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ СВОБОДНОМ ОПИРАНИИ ДВУХ ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ СТОРОН

П.Ф. Недорезов

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

Рассматриваются установившиеся колебания прямоугольной пластинки, у которой два противоположных края свободно оперты при произвольных условиях на остальной части контура. Материал пластинки считается вязкоупругим. Разрешающая система уравнений записана без каких-либо предварительных предположений о характере изменения определяющих величин по толщине пластинки. Трехмерная краевая задача сводится к одномерной с помощью методов разделения переменных и сплайн-коллокации. Для численного решения одномерной задачи применяется устойчивый метод дискретной ортогонализации. Приведены примеры числовых расчетов.

Ключевые слова: пластинка, изгиб, численное решение, сплайны, дискретная ортогонализация.

Введение

При решении задач статики и динамики пластинок и оболочек наряду с классической теорией, базирующейся на гипотезах Кирхгофа (для пластинок) или Кирхгофа–Лява (для оболочек), применяются различные «уточненные» теории. С нашей точки зрения, использование термина «уточненная теория» не вполне корректно, так как говорить о точности той или иной приближенной теории можно только в случае, когда известно решение, полученное на основе строгих уравнений без каких-либо предварительных предположений о характере распределения напряжений и деформаций по толщине пластинки или оболочки. Методики получения таких «точных» решений позволят более объективно оценивать и сравнивать точность различных приближенных теорий.

Подобные методики решения с использованием хорошо апробированного устойчивого численного метода дискретной ортогонализации применительно к задачам о колебаниях некоторых объектов из вязкоупругого материала были предложены в работах [1, 2] (пластинка-полоса), [3] (круговая цилиндрическая оболочка) и [4] (свободно опертая по краям пластинка конечных размеров). Результаты расчетов по этим методикам позволили обнаружить некоторые новые эффекты, которые не могут быть описаны в рамках любых приближенных теорий, предполагающих неизменность прогиба по толщине.

В настоящей работе приводится методика решения задачи о колебаниях толстой

вязкоупругой пластинки при свободном опирании двух противоположных краев и произвольных граничных условиях на остальной части боковой поверхности.

1. Постановка задачи и основные уравнения и соотношения

В декартовой системе координат x, y, z рассматриваются установившиеся колебания толстой вязкоупругой пластинки с размерами в плане a, b и толщиной h . Колебания вызваны распределенной по поверхности $x = -h/2$ нагрузкой интенсивности

$$q(x, y, t) = q_0(x, y) \cos \omega t, \quad (1)$$

В качестве исходных принимаются известные уравнения движения сплошной среды, уравнения, выражающие компоненты тензора малых деформаций через производные от проекций вектора смещений, и соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\tau=-\infty}^t K(t-\tau) \left((1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) d\tau, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{\tau=-\infty}^t K(t-\tau) \gamma_{xy} d\tau \quad (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z). \end{aligned} \quad (2)$$

Напряжения и перемещения, соответствующие нагрузке (1), представляются в виде

$$\begin{aligned} \{u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\} = \\ = \sum_{k=1}^2 \{u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}, \sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \tau_{xy}^{(k)}, \tau_{xz}^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)}\} \sin\left(\frac{\pi}{2}k - \omega t\right), \end{aligned} \quad (3)$$

где все величины, стоящие в правой части, являются функциями координат x, y, z .

Из (2) с учетом представления (3) получаются следующие выражения составляющих $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \dots, \tau_{xy}^{(k)}$ через производные составляющих вектора смещения $u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= A^{-1} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} E_{j+k+1} \left[(1-\nu) \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} \right) \right], \\ \tau_{yz}^{(k)} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} E_{j+k+1} \left(\frac{\partial v^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial w^{(j)}}{\partial y} \right) \\ &(x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z; \quad u^{(j)} \Leftrightarrow v^{(j)} \Leftrightarrow w^{(j)}; \quad k = 1, 2). \end{aligned} \quad (4)$$

В формулах (4) обозначено $A = (1+\nu)(1+2\nu)$; E_k ($k = 1, 2$) – компоненты комплексного модуля материала,

$$E_1 + iE_2 = \int_0^{\infty} K(s) \exp(i\omega s) ds, \quad E_3 = -E_1.$$

Из уравнений движения после отделения с учетом (3) временной переменной и замены составляющих напряжений по формулам (4) получается система дифференциальных уравнений относительно функций $u^{(k)}(x, y, z), v^{(k)}(x, y, z), w^{(k)}(x, y, z)$. Из этих уравнений после ряда преобразований следует система уравнений для безразмерных составляющих вектора смещения $u_k = h^{-1}u^{(k)}, v_k = h^{-1}v^{(k)}, w_k = h^{-1}w^{(k)}$ ($k = 1, 2$), которая в безразмерных переменных $\xi = a^{-1}x, \eta = b^{-1}y, \zeta = h^{-1}z$

может быть представлена в виде

$$\alpha h_0^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi^2} + h_0^2 c^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial \zeta^2} + \beta h_0 \left(h_0 c \frac{\partial^2 v_k}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial \xi \partial \zeta} \right) - (-1)^k 2(1+\nu) \rho h^2 \omega^2 \sum_{j=1}^2 \delta_{j+k-1} u_j = 0 \quad (5)$$

$$(\xi \Leftrightarrow c^{-1} \eta \Leftrightarrow h_0 \zeta; \quad u_k \Leftrightarrow v_k \Leftrightarrow w_k; \quad k = 1, 2).$$

В уравнениях (5) обозначено $h_0 = h/a$, $c = a/b$, $\delta_n = E_n / (E_1^2 + E_2^2)$ ($n = 1, 2$), $\delta_3 = -\delta_1$.

Решение системы (5) должно быть подчинено граничным условиям на краях $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$ и $\eta = 1$ и на поверхностях $\zeta = \mp 0,5$:

$$\text{при } \zeta = -0,5 \quad \sigma_z^{(1)} = -q_0(\xi, \eta); \quad \sigma_z^{(2)} = \tau_{xz}^{(k)} = \tau_{yz}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2);$$

$$\text{при } \zeta = 0,5 \quad \sigma_z^k = \tau_{xz}^{(k)} = \tau_{yz}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (6)$$

2. Понижение размерности краевой задачи

Методика понижения размерности краевой задачи для уравнений (5) несколько изменяется в зависимости от вида функции $q(x, y)$ в (1) и граничных условий на краях $\xi = 0$, $\xi = 1$, $\eta = 0$ и $\eta = 1$.

Когда $q(x, y) = p_0 \sin m\pi\xi \cdot \sin n\eta$ ($p_0 = \text{const}$), а края пластинки подкреплены шарнирами [4], переход от трехмерной краевой задачи к одномерной выполняется методом разделения переменных, если функции $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$ искать в виде

$$u_k(\xi, \eta, \zeta) = U_k(\zeta) \cos m\pi\xi \cdot \sin n\pi\eta, \quad v_k(\xi, \eta, \zeta) = V_k(\zeta) \sin m\pi\xi \cdot \cos n\pi\eta, \\ w_k(\xi, \eta, \zeta) = W_k(\zeta) \sin m\pi\xi \cdot \sin n\pi\eta, \quad k = 1, 2.$$

Тогда условия шарнирного опирания краев удовлетворяются автоматически.

Если $q(x, y) = p_0(\eta) \sin m\pi\xi$, а шарнирно закреплены только края $\xi = 0$, $\xi = 1$ при произвольном закреплении краев $\eta = 0$ и $\eta = 1$ (этот случай рассматривается в дальнейшем), то составляющие смещений, тождественно удовлетворяющие условиям на краях $\xi = 0$, $\xi = 1$, ищутся в виде

$$u_k(\xi, \eta, \zeta) = U_k^*(\eta, \zeta) \cos m\pi\xi, \quad v_k(\xi, \eta, \zeta) = V_k^*(\eta, \zeta) \sin m\pi\xi, \\ w_k(\xi, \eta, \zeta) = W_k^*(\eta, \zeta) \sin m\pi\xi. \quad (7)$$

Тогда из (5) и (7) для функций $U_k^*(\eta, \zeta)$, $V_k^*(\eta, \zeta)$ и $W_k^*(\eta, \zeta)$ получается система двумерных уравнений

$$\frac{\partial^2 U_k^*}{\partial \zeta^2} + h_0^2 c^2 \frac{\partial^2 U_k^*}{\partial \eta^2} - \alpha h_0^2 m^2 \pi^2 U_k^* + \beta h_0 m \pi \left(h_0 c \frac{\partial V_k^*}{\partial \eta} + \frac{\partial W_k^*}{\partial \zeta} \right) - (-1)^k 2(1+\nu) \rho h^2 \omega^2 \sum_{j=1}^2 \delta_{j+k-1} U_j^* = 0 \quad (8)$$

$$(\xi \Leftrightarrow c^{-1} \eta \Leftrightarrow h_0 \zeta; \quad U_k^* \Leftrightarrow V_k^* \Leftrightarrow W_k^*; \quad k = 1, 2).$$

Дальнейшее понижение размерности системы (8) выполняется классическим методом сплайн-коллокации [5]. Согласно этому методу, функции $U_k^*(\eta, \zeta)$, $V_k^*(\eta, \zeta)$

и $W_k^*(\eta, \zeta)$ представляются в виде:

$$\begin{aligned} U_1^*(\eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) U_j(\zeta), & U_2^*(\eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) U_{j+N+1}(\zeta), \\ V_1^*(\eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \psi_j(\eta) V_j(\zeta), & V_2^*(\eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \psi_j(\eta) V_{j+N+1}(\zeta), \\ W_1^*(\eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) W_j(\zeta), & W_2^*(\eta, \zeta) &= \sum_{j=0}^N \varphi_j(\eta) W_{j+N+1}(\zeta), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\varphi_j(\eta) = \psi_j(\eta) = B_{3,j}(\eta) \quad (j = \overline{2, N-2}),$$

$$\varphi_0(\eta) = \psi_0(\eta) = -4B_{3,-1}(\eta) + B_{3,0}(\eta), \quad \varphi_1(\eta) = \psi_1(\eta) = -B_{3,-1}(\eta) + B_{3,1}(\eta), \quad (10)$$

$$\varphi_{N-1}(\eta) = \psi_{N-1}(\eta) = B_{3,N-1}(\eta) - B_{3,N+1}(\eta), \quad \varphi_N(\eta) = \psi_N(\eta) = B_{3,N}(\eta) - 4B_{3,N+1}(\eta),$$

если края $\eta = 0$, $\eta = 1$ закреплены жестко. При шарнирном подкреплении края $\eta = 0$ и жесткой заделке края $\eta = 1$

$$\psi_0(\eta) = B_{3,0}(\eta), \quad \psi_1(\eta) = B_{3,-1}(\eta) + B_{3,1}(\eta), \quad (11)$$

а все функции $\varphi_j(\eta)$ и функции $\psi_k(\eta)$ ($k = \overline{2, N}$) по-прежнему определяются по формулам (10). При таком выборе функций $\varphi_j(\eta)$ и $\psi_k(\eta)$ граничные условия на краях $\eta = 0$ и $\eta = 1$ тождественно выполняются при любых $U_s(\eta, \zeta)$ и $V_s(\eta, \zeta)$ ($s = \overline{0, 2N+1}$).

В формулах (10), (11) $B_{3,j}(\eta)$ – нормализованные кубические B -сплайны [6], определенные на равномерной сетке $\Delta = \{\eta_{-3} < \eta_{-2} < \dots < \eta_{N+3}\}$, $\eta_i = i/N$ ($i = \overline{-3, N+3}$).

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $U_s(\zeta)$, $V_s(\zeta)$ и $W_s(\zeta)$ ($s = \overline{0, 2N+1}$) получается из требования, чтобы результат подстановки выражений (9) в уравнения (8) выполнялся в точках коллокации $\eta = \eta_i^*$ ($i = \overline{0, N}$). Эта система разрешается относительно старших производных функций $U_s(\zeta)$, $V_s(\zeta)$ и $W_s(\zeta)$, что всегда возможно при соответствующем выборе точек коллокации, и затем преобразуется в систему уравнений первого порядка, которая в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\bar{Y}(\zeta)}{d\zeta} = B\bar{Y}(\zeta). \quad (12)$$

Здесь $\bar{Y}(\zeta)$ – вектор неизвестных, компонентами которого являются искомые функции $U_s(\zeta)$, $V_s(\zeta)$, $W_s(\zeta)$ и их первые производные, матрица B с размерностью $(12N+12) \times (12N+12)$ имеет известные компоненты.

Граничные условия для функции $\bar{Y}(\cdot)$ получаются из условий (6), в которых составляющие напряжений выражены с учетом (7) и (9) через компоненты вектора $\bar{Y}(\zeta)$. Выполнение условий (6) требуется в концевых точках отрезков $\eta = \eta_i^*$ ($i = \overline{0, N}$). Эти условия записываются в виде

$$H_1 \bar{Y}(-0,5) = \bar{g}_1, \quad H_2 \bar{Y}(0,5) = \bar{g}_2 \quad (13)$$

с известными матрицами H_1 , H_2 и векторами \bar{g}_1 , \bar{g}_2 .

Краевая задача (12), (13) решается численно устойчивым методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

3. Пример числовых расчетов

Числовые расчеты были выполнены при $m = 1$ для квадратных пластинок ($a = b = 1,0$ м) с различной толщиной h_0 из вязкоупругого материала ЭД-6 МА с параметрами $\rho = 1250$ кг/м³, $E = 2,7 \cdot 10^9$ Н/м², $E_2/E_1 = 0,015$, $\nu = 0,4$ при значении $p_0 = 1,57$ Н/м², которому соответствует амплитуда равнодействующей нагрузки при $\zeta = -0,5$, равная 1,0 Н. Края $\eta = 0$ и $\eta = 1$ предполагались жестко зашеченными. В качестве критических частот принимались значения $\omega = \omega_k$, при которых достигаются экстремумы прогибов точек срединной плоскости пластинки вдоль прямой $\xi = 0,5$, где прогибы получаются максимальными.

Так как картина распределения смещений симметрична относительно сечений $\xi = 0,5$ и $\eta = 0,5$, то в дальнейшем все результаты приводятся для значений $0 \leq \xi, \eta \leq 0,5$.

В табл. 1 указаны критические значения ω_k ($k = 1, 2, 3$) и соответствующие им значения локальных экстремумов амплитуды прогиба $\tilde{W} = W(\xi = 0,5; \eta; \zeta)$; в скобках даны значения η , при которых эти экстремумы достигаются.

Таблица 1

h_0	k	$\omega_k, \text{с}^{-1}$	\tilde{W}
0,025	1	332	$1,590 \cdot 10^{-3}$ (0,50)
	2	1453	$3,373 \cdot 10^{-5}$ (0,21); $3,150 \cdot 10^{-5}$ (0,50)
	3	3369	$4,097 \cdot 10^{-6}$ (0,13); $3,816 \cdot 10^{-6}$ (0,32); $3,832 \cdot 10^{-6}$ (0,50)
0,075	1	957	$2,114 \cdot 10^{-5}$
	2	3820	$5,506 \cdot 10^{-7}$ (0,20); $5,114 \cdot 10^{-7}$ (0,5)
	3	7956	$8,382 \cdot 10^{-8}$ (0,12); $7,641 \cdot 10^{-8}$ (0,31); $7,713 \cdot 10^{-8}$ (0,50)
0,100	1	1232	$7,150 \cdot 10^{-6}$ (0,50)
	2	4637	$2,103 \cdot 10^{-7}$ (0,19); $1,942 \cdot 10^{-7}$ (0,50)
	3	9217	$3,478 \cdot 10^{-8}$ (0,12); $3,169 \cdot 10^{-8}$ (0,31); $3,212 \cdot 10^{-8}$ (0,50)
0,200	1	2047	$6,303 \cdot 10^{-7}$ (0,50)
	2	6382	$2,633 \cdot 10^{-8}$ (0,175); $2,446 \cdot 10^{-8}$ (0,50)
	3	11483	$4,520 \cdot 10^{-9}$ (0,10); $4,432 \cdot 10^{-9}$ (0,30); $4,397 \cdot 10^{-9}$ (0,50)
0,250	1	2315	$3,105 \cdot 10^{-7}$ (0,50)
	2	6814	$1,426 \cdot 10^{-8}$ (0,175); $1,331 \cdot 10^{-8}$ (0,50)
	3	11934	$1,301 \cdot 10^{-9}$ (0,10); $1,378 \cdot 10^{-9}$ (0,30); $1,286 \cdot 10^{-9}$ (0,50)

Соответствующие значения критических частот ω_k^* и локальных экстремумов \tilde{W}_* , вычисленные по классической теории [7], основанной на гипотезах Кирхгофа, приводятся в табл. 2.

Как следует из приведенных в таблицах данных, классическая теория качественно правильно отражает форму изогнутой срединной поверхности колеблющейся пластинки, однако дает завышенные значения для критических частот и заниженные значения локальных экстремумов амплитуды прогиба. Погрешность результатов по классической теории, составляющая доли процента для тонких пластинок ($h_0 \leq 0,025$) при первой критической частоте, быстро нарастает с увеличением номера критической частоты и толщины пластинки и достигает $\approx 300\%$ при $h_0 = 0,25$ и $\omega = \omega_3$.

Таблица 2

h_0	k	ω_k^* , с^{-1}	\tilde{W}
0,025	1	335	$1,569 \cdot 10^{-3}$ (0,50)
	2	1494	$3,211 \cdot 10^{-5}$ (0,21); $3,029 \cdot 10^{-5}$ (0,50)
	3	3556	$3,653 \cdot 10^{-6}$ (0,13); $3,431 \cdot 10^{-6}$ (0,32); $3,433 \cdot 10^{-6}$ (0,50)
0,075	1	1005	$1,937 \cdot 10^{-5}$ (0,50)
	2	4483	$3,965 \cdot 10^{-7}$ (0,21); $3,733 \cdot 10^{-7}$ (0,50)
	3	10672	$4,514 \cdot 10^{-8}$ (0,13); $4,223 \cdot 10^{-8}$ (0,32); $4,245 \cdot 10^{-8}$ (0,50)
0,100	1	1340	$6,130 \cdot 10^{-6}$ (0,50)
	2	5977	$1,246 \cdot 10^{-7}$ (0,21); $1,182 \cdot 10^{-7}$ (0,50)
	3	14229	$1,428 \cdot 10^{-8}$ (0,13); $1,337 \cdot 10^{-8}$ (0,32); $1,343 \cdot 10^{-8}$ (0,50)
0,200	1	2680	$3,331 \cdot 10^{-7}$ (0,50)
	2	11954	$7,841 \cdot 10^{-9}$ (0,21); $7,386 \cdot 10^{-9}$ (0,50)
	3	28458	$8,928 \cdot 10^{-10}$ (0,13); $8,353 \cdot 10^{-10}$ (0,32); $8,394 \cdot 10^{-10}$ (0,50)
0,250	1	3350	$1,569 \cdot 10^{-7}$ (0,50)
	2	14936	$3,207 \cdot 10^{-9}$ (0,21); $3,031 \cdot 10^{-9}$ (0,50)
	3	35574	$3,657 \cdot 10^{-10}$ (0,13); $3,420 \cdot 10^{-10}$ (0,32); $3,438 \cdot 10^{-10}$ (0,50)

Числовые расчеты показывают, что характер колебаний пластинки существенно зависит от ее толщины и частоты внешнего воздействия. В тонких пластинках $h_0 \leq 0,075$ при $\omega \leq \omega_3$ колебания остаются чисто изгибными с постоянными или мало меняющимися по толщине составляющими прогиба при линейном изменении по ζ составляющих тангенциальных смещений. Однако уже при $h_0 = 0,05$ для $\omega \geq 1,5\omega_1$ в отдельных сечениях наряду с чисто изгибными появляются планарные колебания в направлении ξ , сначала в моменты времени $t = \tau_1$ ($\cos \omega \tau_1 = 1$), а затем и в моменты $t = \tau_2$ ($\sin \omega \tau_2 = 1$). Наложение двух форм колебаний в такой пластинке приводит к смещению нулевых точек для U_1^* и U_2^* со срединной плоскости в сторону положительных или отрицательных значений ζ . Иллюстрацией этому может служить рис. 1, на котором изображены графики функции $\tilde{U}(\zeta) = 10^{11} \cdot u_2(\xi = 0,0; \eta; \zeta)$ при $\omega = 1600 \text{ с}^{-1}$ для значений $\eta = 0,3$ (кривая 1), $\eta = 0,4$ (кривая 2) и $\eta = 0,5$ (кривая 3).

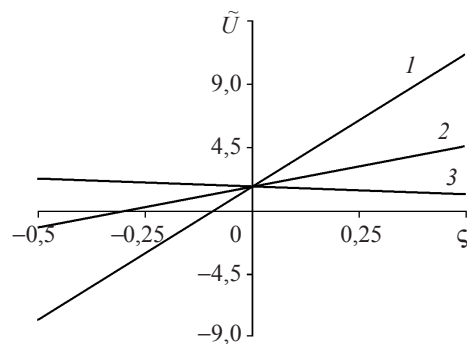


Рис. 1

Одновременно становится заметным изменение составляющих прогиба по толщине пластинки, причем в одном и том же сечении при разных значениях ω закон изменения w_k по толщине может быть качественно различным.

Дальнейшее увеличение толщины h_0 еще более усложняет колебательный процесс. Планарные колебания в отдельных сечениях становятся преобладающими,

что приводит к тому, что знак тангенциальных смещений по толщине не меняется. Это наблюдается, например, в пластинке с толщиной $h_0 = 0,100$ в полосе частот $2980 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 3020 \text{ с}^{-1}$ для составляющей U_1^* в окрестности сечения $\eta = 0,1$, а для $U_2^* u_2$ – при $\eta = 0,4$ и $\eta = 0,5$. При этих же значениях ω в окрестности сечения $\eta = 0,2$ не меняет знак составляющая V_2^* , то есть на колебания в направлении ξ накладываются колебания в направлении η .

С ростом параметра h_0 полоса частот, при которых составляющие тангенциальных смещений сохраняют постоянный знак, расширяется, а зона, где происходят планарные колебания, распространяется на все значения η .

Анализ результатов вычисления составляющих прогиба w показывает, что в пластинках средней и большой толщины h_0 в отдельных сечениях $\eta = \text{const}$ возможны эффекты «подтягивания» (точки лицевых поверхностей $\zeta = \mp 0,5$ смещаются навстречу друг другу) и «разбухания» (указанные точки перемещаются в противоположных направлениях). Эти эффекты были отмечены ранее при изучении вибрационного изгиба толстой пластинки – полосы [1, 2] и толстостенной цилиндрической оболочки [3].

В рассматриваемой задаче при $h_0 = 0,100$ в сечении $\eta = 0,4$ в моменты времени $t = \tau_2$ «разбухание» происходит при $3002 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 3031 \text{ с}^{-1}$, причем в полосе частот $2988 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 3001 \text{ с}^{-1}$ в том же сечении «разбуханию» предшествует двойная смена знака составляющей w_2 .

В более толстых пластинках проявление этих эффектов увеличивается. Так, при $h_0 = 0,200$ в моменты времени $t = \tau_1$, начиная с $\omega = 4025 \text{ с}^{-1}$, в сечении $\eta = 0,1$ наблюдается «подтягивание», которое продолжается для $4583 \text{ с}^{-1} \leq \omega$. При этом, как и в случае $h_0 = 0,100$, при частотах $40013 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 40024 \text{ с}^{-1}$ в этом сечении происходит двойная смена знака составляющей w_1 . В диапазоне частот $4584 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 4730 \text{ с}^{-1}$ w_1 достаточно сильно изменяется по толщине, но сохраняет в каждом сечении свой знак. При $\omega = 4731 \div 5428 \text{ с}^{-1}$ в моменты времени $t = \tau_1$ имеет место «подтягивание» сечений $\eta = 0,1 \div 0,3$. При дальнейшем возрастании ω вплоть до значения $\omega = 5449 \text{ с}^{-1}$ колебания в моменты $t = \tau_1$ происходят без изменения знака у w_1 , а в диапазоне $5450 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 5694 \text{ с}^{-1}$ у составляющей w_1 наблюдается эффект слабого «разбухания» в сечении $\eta = 0,3$. «Разбухание» сменяется зоной неизменного знака w_1 (при $\omega = 5655 \div 5741 \text{ с}^{-1}$), после чего при частотах $5742 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 5920 \text{ с}^{-1}$ снова отмечается «разбухание» в сечении $\eta = 0,3$.

Графики, иллюстрирующие «разбухание» и «подтягивание», представлены на рис. 2 ($h_0 = 0,200$).

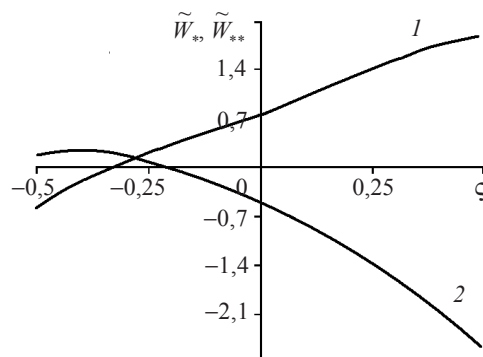


Рис. 2

Кривые на этом рисунке показывают изменение по толщине пластинки функции $\tilde{W}_*(\zeta) = 10^{10} w_1(0,5; 0,1; \zeta)$ при $\omega = 4050 \text{ с}^{-1}$ – кривая 1 («подтягивание»), и функции $\tilde{W}_{**}(\zeta) = 10^{10} w_1(0,5; 0,3; \zeta)$ при $\omega = 5900 \text{ с}^{-1}$ – кривая 2 («разбухание»).

Наряду с «разбуханием» и «подтягиванием» в моменты времени $t = \tau_1$ при $\omega = 4053 \text{ с}^{-1}$ появляется «разбухание» в моменты времени $t = \tau_2$. Сначала этот эффект наблюдается вблизи сечения $\eta = 0,5$, постепенно распространяясь с ростом ω на другие сечения. При $5135 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 5622 \text{ с}^{-1}$ «разбухание» происходит по всей ширине пластинки, но затем зона «разбухания» сужается и оно прекращается при $\omega \geq 5701 \text{ с}^{-1}$.

При приближении значения ω к критическому значению ω_2 колебания происходят без смены знака составляющих w_1 и w_2 . Уровень планарных колебаний несколько понижается, но закон изменения тангенциальных смещений по толщине становится еще более нелинейным. Например, при $h_0 = 0,200$ и $\omega = 6300 \text{ с}^{-1}$ составляющая v_2 в сечении $\eta = 0,1$ три раза меняет знак.

Аналогичная картина колебательного процесса наблюдается и в диапазоне частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Литература

1. Недорезов, П.Ф. О колебаниях толстой вязкоупругой пластинки-полосы, свободно опертой по краям / П.Ф. Недорезов // Нелинейная динамика механических и биологических систем: Межвуз. научн. сб. / Саратов. гос. техн. ун-т. – 2004. – Вып. 2. – С. 20–27.
2. Недорезов, П.Ф. Вибрационный изгиб толстой вязкоупругой консольной пластинки-полосы распределенной поперечной нагрузкой / П.Ф. Недорезов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2007. – Вып. 69. – С. 170–176.
3. Недорезов, П.Ф. Осесимметричный вибрационный изгиб толстостенной круговой цилиндрической оболочки из вязкоупругого материала при произвольном закреплении торцов / П.Ф. Недорезов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2008. – Вып. 70. – С. 184–190.
4. Недорезов, П.Ф. Об установившихся колебаниях толстых вязкоупругих пластинок с шарнирно опертым контуром / П.Ф. Недорезов, А.В. Каменский // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Труды VI Междунар. научно-техн. конф. – ПГУПС МПС России, 28–29 января. – 2004 г. – СПб: ПГУПС, 2004. – С. 292–301.
5. Григоренко, Я.М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, №б. – С. 3–26.
6. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов., Ю.И. Квасов, И.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
7. Недорезов, П.Ф. Метод сплайн-коллокации в задаче о вибрационном изгибе вязкоупругой пластинки при сложном закреплении краев / П.Ф. Недорезов // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. 6-й межвуз. науч. конф., Самарск. гос. техн. ун-т. – Самара, 1996. – Ч.1. – С. 64–66.

[6.07.2009]

ON THE STEADY-STATE VIBRATIONS OF A THIN RECTANGULAR PLATE OF A POLYMERIC MATERIAL WITH TWO SIMPLY SUPPORTED OPPOSITE EDGES

P.F. Nedorezov

Steady-state vibrations of a rectangular plate with two simply supported opposite edges and random conditions along the rest of the contour are studied. The material of the plate is assumed visco-

elastic. The resolving equation set is written without any a priori assumptions about the nature of the parameter changes throughout the thickness of the plate. The 3-D problem is reduced to a 1-D one, using the variable separation method and spline-collocation. The problem is numerically analyzed using the stable method of discrete orthogonalization. Examples of numerical calculations are given.

Key words: plate, bending, numerical analysis, splines, discrete orthogonalization.