

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ СО СЛОЕМ ГАЗОПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНУЛИРОВАННОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ<sup>\*)</sup>

Е.Г. Глазова, А.В. Кочетков

*НИИМ Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского*

Описывается математическая модель и излагаются основные положения численной реализации двухскоростной модели плотно-упакованной зернистой пористой среды, поровое пространство которой заполнено газом. С помощью реализованной модели исследуются процессы прохождения импульса конечной длительности через границу раздела «чистый газ–пористая среда» и отражения от жесткой стенки за пористым слоем. Анализируется влияние параметров модели на процесс распространения и отражения волн.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, распад разрыва, взаимопроникающие континуумы, ударная волна, деформация, вязкость.

Газопроницаемые пористые преграды различной структуры считаются перспективными элементами для снижения силовых воздействий на конструкции. В некоторых случаях, однако, возникает обратный эффект. Поэтому разработка методов расчета действия газопроницаемых преград является актуальной задачей. Моделирование волновых процессов в подобных средах требует привлечения нелинейных уравнений на основе механики взаимопроникающих континуумов [1–4]. Решение начально-краевых задач для таких систем уравнений является сложной проблемой, требует привлечения и адаптации хорошо зарекомендовавших себя численных методов. В настоящее время имеются лишь единичные работы, например [1, 3], в которых получены решения задач данного класса. Ниже для численного решения одномерной задачи взаимодействия ударной волны с плотно-упакованной средой «газ–металлические шарики» используется схема С.К. Годунова [5]. Результаты расчетов сопоставляются с численными и экспериментальными данными [3, 6].

### 1. Уравнения динамического деформирования пористого слоя как двухскоростной среды в одномерном приближении

Полагаем, что в одной и той же области определения задачи  $r_1 \leq r \leq r_2$  имеются два взаимодействующих континуума: газ и гранулированная среда, состоящая из металлических шарообразных частиц (рис. 1). Индекс 1 будем относить к поровому газу, а индекс 2 – собственно к твердым частицам как «скелету» среды. Уравнения динамики газа в форме законов сохранения будут иметь вид:

---

<sup>\*)</sup> Выполнено при поддержке РФФИ (проект 09-08-00711-а).

$$\frac{\partial(\rho_1^0 Q)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1^0 u_1 Q)}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho_1^0 u_1 Q)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho_1^0 u_1^2 + p_1)Q]}{\partial r} = p_1 \frac{dQ}{dr} + \frac{3}{2} \alpha_2 Q \frac{\partial p_1}{\partial r} - nfQ, \quad (1)$$

$$\frac{\partial[\rho_1^0 (u_1/2 + e_1)Q]}{\partial t} + \frac{\partial\{[\rho_1^0 (u_1^2/2 + e_1)u_1 + p_1 u_1]Q\}}{\partial t} = nqQ.$$

Здесь  $p_1$  – давление,  $\rho_1^0$  – истинная плотность,  $u_1$  – скорость,  $e_1$  – внутренняя энергия,  $\alpha_1, \alpha_2$  – объемные концентрации газа и металла в элементе объема смеси ( $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ),  $n$  – количество твердых частиц в единице объема смеси,  $f$  – сила воздействия твердой компоненты на газ,  $q$  – тепловой поток от газа к гранулированной среде,  $Q = Q(r) = r^{\nu-1}$ ,  $\nu = 1, 2, 3$  для плоской, цилиндрической и сферической задач соответственно.

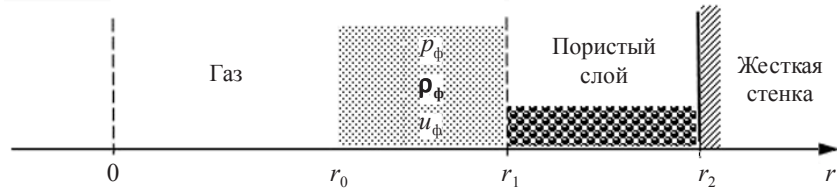


Рис. 1

Уравнение состояния газа записываем в калорической форме:

$$p_1 = (\kappa - 1)\rho_1^0 e_1,$$

$\kappa$  – показатель адиабаты.

Уравнения динамики «скелета» как вязкоупругой среды записываются также в форме законов сохранения:

$$\frac{\partial(\rho_2 Q)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 Q)}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho_2 u_2 Q)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho_2 u_2^2 + p_2 + p_2^*)Q]}{\partial r} = (p_2 + p_2^*) \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{3}{2} \alpha_2 Q \frac{\partial p_1}{\partial r} + nfQ, \quad (2)$$

$$p_2 = \rho_{20} C_2^2 \left( \frac{\rho_2}{\rho_{20}} - 1 \right).$$

Здесь  $\rho_2$  – приведенная плотность «скелета»,  $\rho_{20}$  – ее значение в начальный момент времени,  $C_2$  – скорость продольной волны,  $p_2$  – напряжение сжатия твердой компоненты в направлении оси  $r$  (деформации по другим направлениям полагаем равными нулю);  $p_2^* = -k\rho_2 C_2 d \partial u_2 / \partial r$  – дополнительное напряжение, обусловленное вязкостными силами при деформации «скелета» среды,  $d$  – диаметр частиц,  $k$  – безразмерный коэффициент вязкости. Считается, что сами частицы не деформируются, а деформация «скелета» происходит за счет переукладки частиц.

Силу  $f$ , действующую на твердую компоненту со стороны газа, определим как сумму трех сил [1]:

$$f = f_s + f_\mu + f_m, \quad (3)$$

где  $f_s$  – сила сопротивления,  $f_\mu$  – сила вязкого трения газа при обтекании частиц,  $f_m$  – инерционная сила, связанная с присоединенной массой газа. Сила сопротивления для отдельной частицы определяется соотношением

$$f_s = \frac{\pi d^2}{8} \rho_1^0 C_D |u_1 - u_2| (u_1 - u_2), \quad (4)$$

где  $C_D = 1$  – коэффициент сопротивления [2]. Сила вязкого трения газа принимается в виде [1]

$$f_\mu = \eta_\mu (d/2)^{-2} \mu_1 (u_1 - u) \alpha_1 \alpha_2. \quad (5)$$

Здесь  $\mu_1$  – динамическая вязкость газа,

$$\eta_\mu = \frac{3}{16} c_\mu \text{Re}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_1^0 |u_1 - u_2|}{\mu_1};$$

коэффициент вязкого трения  $c_\mu$  вычисляется по эмпирическим соотношениям:

$$\begin{aligned} c_\mu &= c_\mu^{(1)} = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{4,4}{\text{Re}^{1/2}} + 0,42 \quad \text{при } \alpha_2 \leq 0,085, \\ c_\mu &= c_\mu^{(2)} = \frac{4}{3\alpha_1} \left( 1,75 + \frac{150\alpha_2}{\alpha_1 \text{Re}} \right) \quad \text{при } \alpha_2 \geq 0,45, \\ c_\mu &= \frac{(\alpha_2 - 0,085)c_\mu^{(2)} + (0,45 - \alpha_2)c_\mu^{(1)}}{0,37} \quad \text{при } 0,085 < \alpha_2 < 0,45. \end{aligned} \quad (6)$$

Сила, связанная с присоединенной массой газа, представляется в виде [2]

$$f_m = \frac{1}{2} \rho_1^0 \chi_m \left( \frac{d_1 u_1}{dt} - \frac{d_2 u_2}{dt} \right) \alpha_1 \alpha_2,$$

$\chi_m$  – безразмерный коэффициент, принимаемый равным 0,1 [1].

Соотношения (6) были получены из экспериментов по стационарной продувке газов сквозь насыпной слой неподвижных сферических частиц. В ряде работ [3, 4] силы сопротивления дисперсной фазы при малых  $\alpha_2$  задаются в альтернативной форме – форме силы Архимеда –  $3/2 \cdot \alpha_2 \partial p_1 / \partial r$  в уравнениях сохранения импульса компонент смеси (вторые уравнения систем (1), (2)). При учете сопротивления в форме силы Архимеда необходимо в (3) положить  $f_s = 0$ .

## 2. Особенности численной реализации двухскоростной модели среды

Нелинейные системы уравнений динамики пористой среды (1), (2) интегрируются по явной схеме С.К. Годунова в подвижной области определения задачи  $r_1 \leq r \leq r_2$  (см. рис. 1), где левая граница  $r = r_1$  является контактной границей с объемом «чистого» газа. Эта граница может перемещаться и является проницаемой для газа. Правая граница  $r = r_2$  – жесткая стенка.

Для определения граничных потоков массы, импульса и энергии через проницаемую границу последовательно решаются две задачи о распаде разрыва: между «чистым» газом и деформируемым «скелетом» пористой среды, между «чистым» газом и поровым газом с учетом движения контактной границы. Полученные потоки  $M_1, M_2$  осредняются по формуле

$$M = M_2 K_n + M_1 (1 - K_n),$$

$K_n$  – коэффициент «живого» сечения в направлении оси  $Or$ , и передаются для интегрирования в область «чистого» газа. Для интегрирования уравнений (1) и (2) в область, занятую двухкомпонентной средой, подаются непосредственно потоки  $M_1$  и  $M_2$ . Аналогичный прием используется и на границе  $r = r_2$ , где реализуется алгоритм контакта пористой среды с жесткой преградой. Численное определение дополнительного напряжения  $p_2^*$  в (2) производится по разностным соотношениям, аналогичным тем, которые используются в схемах с искусственной вязкостью.

Для интегрирования уравнений (1) и (2) внутри расчетной области  $r_1 \leq r \leq r_2$  используется единая разностная сетка. Расчет правых частей этих уравнений, отвечающих за взаимодействие двух континуумов, производится по значениям функций с нижнего временного слоя. При интегрировании уравнений газовой динамики (1) внутри расчетной области учитывается реальный объем, занимаемый поровым газом, то есть  $V_1 = (1 - \alpha_2)V$ , а значения потоков соответственно корректируются умножением на  $K_n$  – коэффициент «живого» сечения.

Описанная численная модель реализована в составе ППП «Динамика-1» [7]. Ниже приведены результаты исследования ее работоспособности и изучения влияния различных факторов на параметры волн, проходящих через пористый слой.

### 3. Исследование волновых процессов в пористом слое на основе двухскоростной модели взаимопроникающих континуумов

С целью исследования свойств используемой модели на основе уравнений динамики взаимопроникающих континуумов выполнены расчеты применительно к условиям проведения экспериментов [6]. Эксперименты проводились на насыпной среде. Плоская воздушная ударная волна (УВ), образующаяся после разрыва диафрагмы в вертикальной ударной трубе, набегала на слой шариков, лежащих на дне трубы. Для регистрации воздействия на преграду в торце трубы под пористым слоем было установлено два типа датчиков: первый открыт для контакта с частицами, второй закрыт тонкой сеткой. Открытый датчик записывал полное напряжение, закрытый – давление газа. В экспериментах варьировались материал, из которого изготовлены шарики, и толщина слоя.

Расчеты одномерных задач взаимодействия плоского потока газа за УВ со слоем стальных шариков, находящимся в контакте с жесткой неподвижной стенкой (см. рис. 1), были выполнены для двух значений толщины пористого слоя:  $h = r_2 - r_1 = 1,2$  см и  $h = 3,5$  см. В начальный момент времени  $t = 0$  в области  $r_0 \leq r \leq r_1$  (здесь  $r_0 = 0$ ) «чистого» газа перед контактной границей «газ–пористая среда» задавалось распределение газодинамических параметров за фронтом плоской УВ:  $p_\phi = 1,805$  бар,  $\rho_\phi = 0,001864$  г/см<sup>3</sup>,  $u_\phi = 149,2$  м/с. На границе  $r = r_0 = 0$  было приложено постоянное давление  $p_0 = 1,805$  бар. Начальные условия в «поровом» газе:  $\kappa = 1,4$ ;  $p_1 = 1$  бар,  $\rho_1^0 = 0,00123$  г/см<sup>3</sup>,  $u_1 = 0$  м/с,  $\mu_1 = 1,71 \cdot 10^{-5}$  Па·с. Начальные параметры частиц, составляющих «скелет» пористой среды: объемная концентрация металла  $\alpha_2 = 0,601$ ;  $d = 0,045$  см;  $K_n = 0,125$ ;  $\rho_{20} = 4,46$  г/см<sup>3</sup>;  $C_2 = 156$  м/с;  $k = 1,55$ . Численные решения получены на сетке с шагом  $\Delta r = 0,1$  см.

На рис. 2 представлены распределения по координате  $r$  давления «чистого» и порового газа (рис. 2,а), а также полного напряжения (давления) в пористом слое (рис. 2,б) при  $h = 3,5$  см. Распределения приведены для моментов времени, которые обозначены цифрами рядом с кривыми (в мс). Контактной границе «газ–пористая среда» соответствует координата  $r_1 = 20$  см. В результате взаимодействия воздушной ударной волны с пористым слоем в область газа отражается ударная волна. На интер-

вале  $t = 0,01 \div 0,21$  мс деформационная волна распространяется по слою и подходит к жесткой стенке. При ее взаимодействии с преградой в область пористого слоя отражается волна сжатия ( $t = 0,32 \div 0,43$  мс), при этом напряжение на преграде существенно повышается.

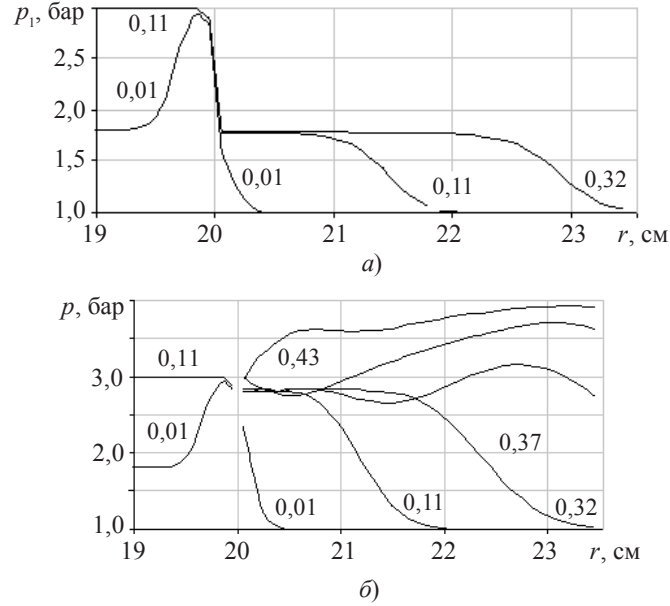


Рис. 2

Распределение скоростей частиц газа и твердой компоненты в различные моменты времени представлено на рис. 3.

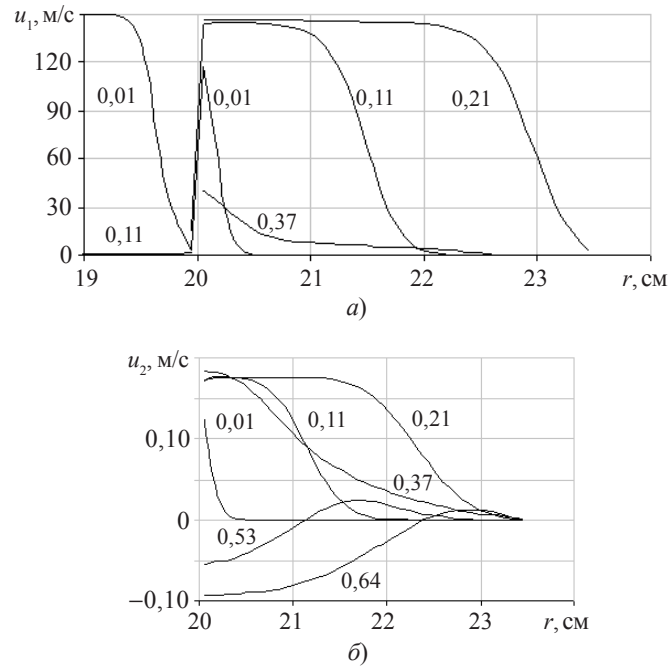


Рис. 3

На рис. 3,а приведены эпюры скоростей «чистого» и порового газа. По мере распространения волны вглубь слоя скорость газа падает в силу диссипативных процессов (действия вязкостных сил  $f_m$ ), на контактной границе  $r_1 = 20$  см наблюдается скачкообразное ее увеличение. На рис. 3,б показаны эпюры скоростей частиц «скелета» пористого слоя. Скорость газа на два порядка превышает скорость твердых частиц. При заданном уровне воздействия перемещения контактной границы пренебрежимо малы.

Сопоставление расчетных данных (сплошные линии) с экспериментальными [6] (линии с маркерами) по давлению на жесткой стенке представлено на рис. 4. Здесь приведены полное давление в смеси газа с твердыми частицами (рис. 4,а) и давление в поровом газе (рис. 4,б) для  $h = 1,2$  см; те же параметры на рис. 4,в и рис. 4,г изображены для  $h = 3,5$  см; пунктиром на рис. 4,в и рис. 4,г показаны численные решения [3]. Видно, что полученная по предложенной модели численная зависимость полного напряжения от времени в целом соответствует известному численному решению [3] и экспериментальным результатам [6]. Некоторое отличие в амплитуде первого колебания давления связано с использованием различных моделей вязкоупругого деформирования гранулированного слоя. В то же время полученное давление порового газа лучше соответствует эксперименту, чем решение [3].

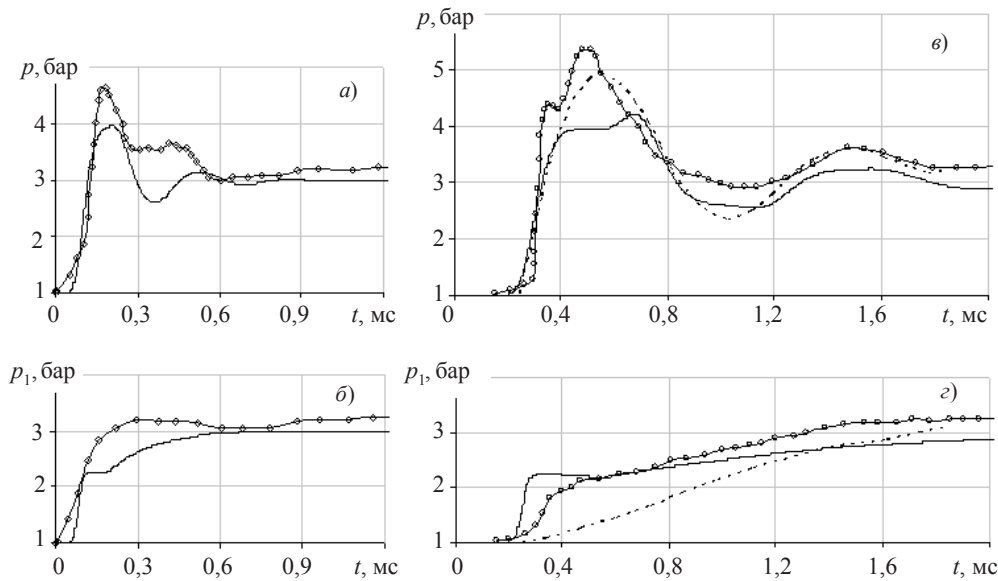


Рис. 4

С целью анализа влияния вязкости  $p_2^*$  на поведение слоя на рис. 5 представлены аналогичные рис. 4,в результаты для ряда значений коэффициента вязкости  $k$ : кривая 1 соответствует  $k = 0$ , кривая 2 –  $k = 0,88$  и кривая 3 –  $k = 1,55$ . Отсутствие вязкости ( $k = 0$ ) приводит к практически незатухающим колебаниям слоя, повышение коэффициента вязкости увеличивает демпфирование системы и приводит к более быстрому стационариванию численного решения. Следует отметить малое относительное влияние на волновые процессы межфазных сил сопротивления  $f_s$  и сил  $f_m$ , связанных с присоединенной массой порового газа. Также пренебрежимо малое

влияние оказывает теплопередача от газа к металлу. Основное влияние оказывают вязкие силы Стокса  $f_{\mu}$ .

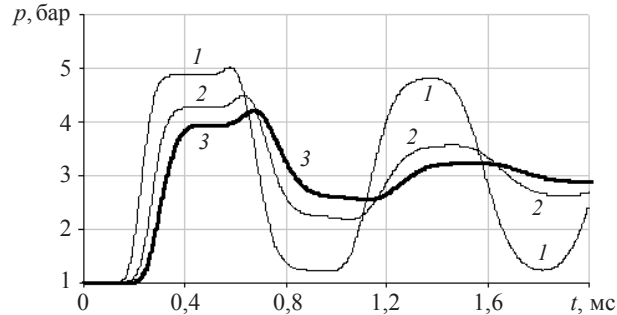


Рис. 5

Для оценки влияния гранулированного слоя на величину давления на жесткую преграду выполнены расчеты задач взаимодействия импульса конечной длительности со слоем металлических шариков, находящимся в контакте с жесткой неподвижной стенкой (см. рис. 1), и при отсутствии слоя. В начальный момент времени  $t = 0$  в области  $r_0 \leq r \leq r_1$  «чистого» газа перед контактной границей «газ–пористая среда» задано распределение газодинамических параметров:  $p_{\phi}$ ,  $\rho_{\phi}$ ,  $u_{\phi}$  в плоской УВ, где индекс « $\phi$ » указывает на амплитудные значения параметров. Начальные условия в поровом газе и параметры частиц, составляющих скелет пористой среды, – те же, что и в предыдущей задаче.

Была проведена серия расчетов с  $p_{\phi} = 1,805; 2,5; 5; 7,5; 10; 12; 14; 15$  кГ/см<sup>2</sup>. Параметры  $\rho_{\phi}$ ,  $u_{\phi}$  рассчитывались из соотношений теории плоских волн:

$$\frac{p_{\phi}}{p_0} = (1 + \mu^2)M^2 - \mu^2, \quad M = \frac{D_{VB}}{C_0}, \quad \mu^2 = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2},$$

$$\frac{\rho_{\phi}}{\rho_1^0} = \frac{(\kappa + 1)M^2}{2 + (\kappa - 1)M^2}, \quad u_{\phi} = \frac{2}{\kappa + 1} D_{VB} \left( 1 - \frac{1}{M^2} \right),$$

где  $D_{VB}$  – скорость ударной волны,  $C_0 = 340$  м/с – скорость звука в газе. Варьировались также толщина пористого слоя:  $h = 2; 3,5; 4,5$  см – и длительность импульса  $t$ : от 0,02 до 0,07 мс.

На рис. 6 представлены значения полного давления на жесткой стенке в зависимости от времени.

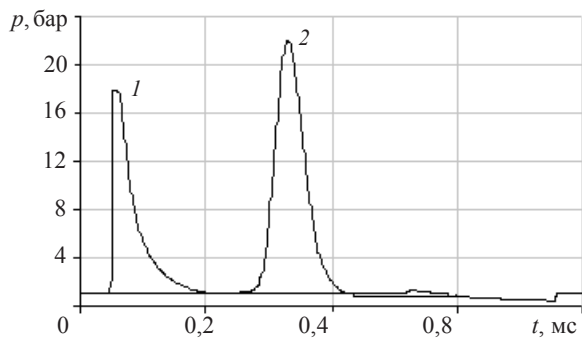


Рис. 6

Кривая 1 соответствует варианту расчета задачи без пористого слоя при  $p_\phi = 5$  бар,  $t = 0,05$  мс; кривая 2 отвечает расчету с пористым слоем  $h = 3,5$  см. Значения импульса  $I = \int_0^t (p(t) - p_0) dt$  от времени для тех же вариантов расчета показаны на рис. 7. При данных параметрах слоя и воздействия наблюдается существенное увеличение как максимального давления, так и импульса на преграду.

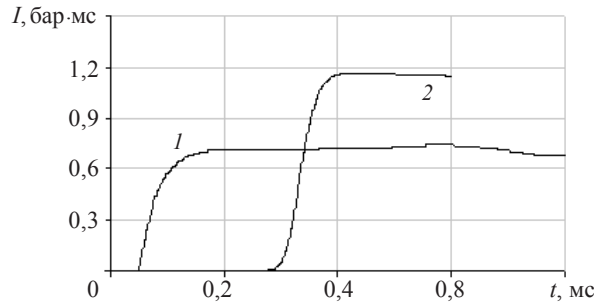


Рис. 7

На рис. 8 показаны сводные данные по максимальным давлениям (рис. 8,а) и значениям импульса (рис. 8,б) на жесткой стенке в зависимости от значений  $p_\phi$ . Результаты приведены в относительной форме,  $p_1, I_1$  – значения соответствующих величин при расчетах без пористой среды,  $p_2, I_2$  – с пористым слоем толщиной  $h = 3,5$  см. Длительность импульса составляла  $t = 0,05$  мс. Пористый слой уменьшает амплитуду воздействия только при малых  $p_\phi$ , но и при них величина импульса увеличивается за счет времени действия ударной волны.

На рис. 9 представлены аналогичные данные для расчетов с  $p_\phi = 5$  бар и  $h = 3,5$  см в зависимости от  $t$ . Уменьшение максимального давления на преграду достигается только при малых длительностях воздействующего на слой импульса. В этом случае диссипативные механизмы успевают сгладить воздействие. Но величина импульса давления на преграде остается на 60% больше, чем при отсутствии пористого слоя.

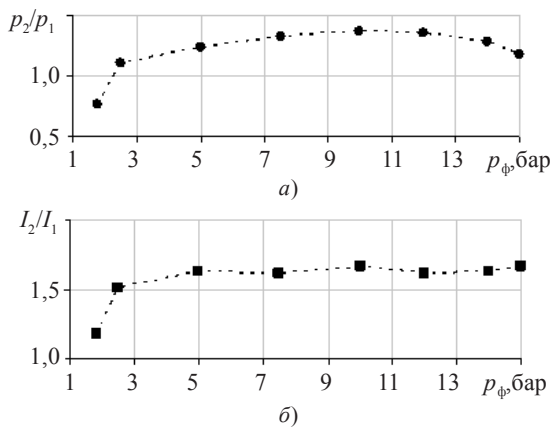


Рис. 8

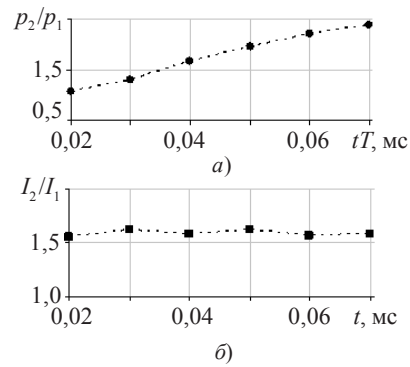


Рис. 9

На рис. 10, наоборот, варьировались толщины пористого слоя, амплитуда  $p_\phi = 5$  бар и длительность импульса  $t = 0,05$  мс были постоянными. В этом случае



увеличение  $h$  уменьшает амплитуду давления на преграду, но полный импульс остается на 60% больше, чем при отсутствии преграды.

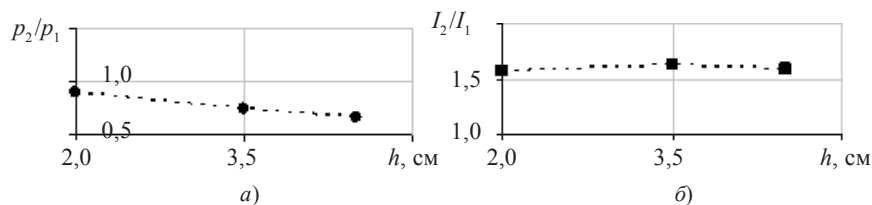


Рис. 10

Таким образом, предложенная модель динамического деформирования пористого слоя позволяет исследовать волновые процессы в газопроницаемых гранулированных средах и оценивать нагрузки на элементы конструкций.

#### Литература

1. Численная модель деформирования противоосколочной сетки при взрывном нагружении / А.И. Абакумов [и др.] // Математическое моделирование физических процессов: Труды ВНИИЭФ. – 2006. – №10. – С. 16–30.
2. Кутателадзе, С.С. Теплоотдача и гидродинамическое сопротивление: Справ. пособие / С.С. Кутателадзе. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 380 с.
3. Губайдуллин, А.А. Моделирование взаимодействия воздушной ударной волны с пористым экраном / А.А. Губайдуллин, Д.Н. Дудко, С.Ф. Урманчиев // Физика горения и взрыва. – 2000. – Т. 36, №4. – С. 87–96.
4. Нигматуллин, Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1 / Р.И. Нигматуллин. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
5. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов [и др.] – М.: Наука, 1976. – 400 с.
6. Mechanism of compressive stress formation during weak shock waves impact with granular materials / G. Ben-Dor [et al.] // Experiments in Fluids. – 1997. – V. 22. – P. 507–518.
7. Пакет прикладных программ «Динамика-1» / С.А. Афанасьев [и др.] // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Автоматизация научных исследований по прочности: всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. – 1986. – С. 21–29.

[9.06.2009]

### MODELING THE INTERACTION OF A SHOCK WAVE WITH A LAYER OF A GAS-PERMEABLE GRANULAR DEFORMABLE MEDIUM

E.G. Glazova, A.V. Kochetkov

A mathematical model is described and the main points are given for numerically implementing a two-rate model of a densely-packed granular porous medium with the gas-filled porous space. Using the implemented model, the processes of the passage of a finite length pulse through the "pure gas-porous medium" boundary and its reflection from the rigid wall behind the porous layer are investigated. The effect of the parameters of the model on the wave propagation and reflection processes is studied.

**Key words:** mathematical modeling, breakage decomposition, interpenetrating continua, shock wave, deformation, viscosity.