УДК 539.529

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ОБОЛОЧКЕ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА, СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКОВУЮ ЖИДКОСТЬ

**Р.Ю. Амензаде, Э.Т. Киясбейли, Г.М. Салманова**

*Бакинский госуниверситет, Азербайджан*

Представлены результаты теоретического решения линеаризованной осесимметричной задачи о пульсирующем движении двухфазной пузырьковой жидкости, заключенной в упругую ортотропную оболочку. Течение смеси описывается моделью идеальной сжимаемой баротропной среды, а для оболочки используются уравнения движения, учитывающие сдвиг. В качестве примера рассмотрена оболочка с протекающей водой, которая содержит небольшие добавки пузырьков воздуха. Одной из важных задач динамики такой системы «оболочка–жидкость» является определение частот и форм собственных колебаний. Для длинных и коротких волн численно выявлено влияние объемного содержания пузырьков и ортотропии на волновые характеристики.

**Ключевые слова:** двухфазная жидкость, ортотропная оболочка, пузырьки, гармонические волны, круговая частота.

## Введение

Проблема распространения волн в деформируемых оболочках с протекающей в ее полости жидкостью является весьма актуальной. Это связано с широким распространением в технике и живых организмах систем транспортировки жидкостей. Основные идеи и принципы волнового движения жидкостей в деформируемых оболочках достаточно хорошо известны [1–3]. Однако механизмы ряда явлений, например, многофазности жидкости вкупе с учетом сдвига и ортотропии материала оболочки, изучены совершенно недостаточно.

В этой связи в предлагаемой работе предложена схема анализа и приведены результаты исследований закономерностей распространения гармонических волн в системе: бесконечная незакрепленная цилиндрическая тонкостенная упругая оболочка кругового поперечного сечения и сжимаемая идеальная жидкость. При этом жидкость принимается двухфазной, баротропной и пузырьковой. Рассматривается линеаризованная постановка задачи для осесимметричных волн, распространяющихся вдоль оси оболочки в ее положительном направлении. В указанном случае малых возмущений будем использовать общие координаты для оболочки и жидкости, которые совпадают с эйлеровыми и лагранжевыми координатами. Для ортотропной оболочки применяются уравнения, учитывающие деформацию сдвига. Это обстоятельство позволяет не налагать ограничений на величину длины волны.

## 1. Основные соотношения и постановка задачи

В систему уравнений, описывающих распространение волн в деформируемых оболочках, содержащих жидкость, входят уравнения движения оболочки и жидкости, ограниченность искомых функций, а также непрерывность компонент на границе контакта жидкости и оболочки.

**Математическая модель жидкости.** Введем в рассмотрение двухфазную среду, представляющую собой смесь жидкости с пузырьками газа. Следуя [4], приведем основные и необходимые здесь допущения для математического описания течений пузырьковых жидкостей методами механики сплошной среды. Они значительно упрощают постановку и решение задачи, не искажая при этом сущности явления:

– в каждом элементарном макрообъеме пузырьки присутствуют в виде сферических включений одного и того же радиуса $r_0$, причем объемная концентрация пузырьков не очень велика (смесь монодисперсная), а величина $r_0$ значительно меньше характерных размеров задачи;

– непосредственным взаимодействием и столкновениями пузырьков друг с другом можно пренебречь;

– процессы слияния (коагуляции), дробления и образования новых пузырьков отсутствуют;

– скорости пузырьков и несущей фазы одинаковы;

– пузырьки обладают нейтральной плавучестью, т.е. не оседают и не всплывают.

В рамках сделанных допущений, для случая когда несущая фаза является идеальной жидкостью, будем считать течение смеси потенциальным. Тогда для определения потенциала скорости $\varphi(x, r, t)$ имеем уравнение [5]:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

где $t$ – время, а $\Delta$ – оператор Лапласа.

При известном потенциале $\varphi$ гидродинамическое напряжение $q$ и вектор скорости $\boldsymbol{\upsilon}$ течения смеси определяются как

$$q = -\rho_f \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{\upsilon} = \operatorname{grad}\varphi. \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) квадрат скорости $a^2$ и плотность газожидкостной среды $\rho_f$ записываются посредством формул [4]:

$$a^2 = \frac{1}{\alpha_2(1-\alpha_2)}\left(\frac{\rho_1^0}{\rho_1^0 - \rho_2^0}\right)^2 \frac{p}{\rho_1^0}, \tag{1.4}$$

$$\rho_f = (1-\alpha_2)\rho_1^0 + \alpha_2\rho_2^0. \tag{1.5}$$

В (1.4), (1.5) $\alpha_2$ – объемное содержание пузырьков, $\rho_1^0, \rho_2^0$ – соответственно истинные плотности несущей и дисперсной фаз, $p$ – статическое давление в жидкости. Индекс 0 наверху означает значение параметра в равновесном состоянии.

Если объемное содержание пузырьков в единице объема смеси достаточно мало ($\alpha_2 \ll 1$), то среда может рассматриваться как однородная. Особенностью такой жидкости при обычных давлениях $p$, когда $\rho_2^0 << \rho_1^0$, является то, что

$$\rho_f = \alpha_1\rho_1^0 + \alpha_2\rho_2^0 \approx \alpha_1\rho_1^0 \approx \rho_1^0, \tag{1.6}$$

так как $\alpha_2 + \alpha_1 = 1$. Это позволяет с достаточной степенью точности записать формулу (1.4) в следующем виде

$$a^2 \approx \frac{p}{\alpha_2\rho_1^0}, \tag{1.7}$$

где $a$ – равновесная скорость звука в смеси.

**Уравнения движения оболочки.** Пусть в невозмущенном состоянии дана цилиндрическая круговая оболочка радиуса $R$ и толщиной $2h$. Композитный материал будем моделировать упругим линейным ортотропным телом и применять теорию тонких оболочек, построенную с учетом эффекта сдвига. В цилиндрической системе координат $(x, \theta, r)$ при рассмотрении осесимметричных возмущений (этим условием исключается крутильная волна в оболочке) уравнения движения оболочки, на которую действует гидродинамическое давление (0, 0, $q$), запишем следующим образом [6]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu_2}{R}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\rho_*}{E_1}(1-\nu_1\nu_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
-\frac{w}{R} - \nu_1\frac{\partial u}{\partial x} + R\frac{h^2}{3}\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{R(1-\nu_1\nu_2)}{2E_2 h}q\bigg|_{r=R} = \frac{\rho_*}{E_2}R(1-\nu_1\nu_2)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
\psi + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{h^2}{3(1-\nu_1\nu_2)}\frac{E_1}{G}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь давление жидкости на стенку оболочки согласно (1.2) при условии (1.6) будет

$$q\big|_{r=R} = -\rho_1^0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{r=R}, \tag{1.9}$$

$\{u(x,t), 0, w(x,t)\}$ – перемещения точек срединной поверхности оболочки, $\psi(x, t)$ – угол поворота сечения к ней, $\rho_*$ и $G$ – плотность и модуль сдвига материала оболочки. Осевой и тангенциальный модули упругости $E_1$, $E_2$ и коэффициенты Пуассона $\nu_1$, $\nu_2$ должны удовлетворять равенству Максвелла $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$.

**Контактное условие.** Для завершения постановки задачи необходимо сформулировать контактное условие, связывающее движение жидкости и оболочки. Принимая во внимание допущение о нейтральной плавучести, условие сопряжения будет иметь вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{при } r = R. \tag{1.10}$$

Таким образом, можно считать, что уравнения (1.1), (1.8), (1.9) и (1.10) полностью описывают рассматриваемую задачу.

**2. Волновое решение уравнения гидродинамики**

В дальнейшем будем полагать, что все искомые функции пропорциональны временному множителю $\exp(i\omega t)$, где $i = \sqrt{-1}$ мнимая единица, а $\omega$ – круговая частота. Таким образом, будем исходить из выражения для потенциала скоростей в виде

$$\varphi = \overline{\varphi}(x, r)\exp(i\omega t). \quad (2.1)$$

Подставляя в (1.1) решение (2.1), находим:

$$\Delta\overline{\varphi} + \frac{\omega^2}{a^2}\overline{\varphi} = 0. \quad (2.2)$$

Оператор $\Delta$ в цилиндрических координатах равен

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Теперь соотношение (2.2) запишется в форме

$$\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial r} + \frac{\omega^2}{a^2}\overline{\varphi} = 0. \quad (2.3)$$

Применяя метод разделения переменных и оставляя в рассмотрении только волну, бегущую в положительном направлении оси $x$, окончательно для функции $\varphi$ получим:

$$\varphi = AJ_0(i\lambda r)\exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}}\,x\right\}\exp(i\omega t), \quad (2.4)$$

где $A$ – постоянная интегрирования, а $J_0(i\lambda r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

### 3. Дисперсионное уравнение

Дифференциальные уравнения движения оболочки (1.8) удовлетворяются при подстановке в них решений вида:

$$u = u_0 \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}}\,x\right\}\exp(i\omega t), \quad (3.1)$$

$$w = w_0 \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}}\,x\right\}\exp(i\omega t), \quad (3.2)$$

$$\psi = \psi_0 \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}}\,x\right\}\exp(i\omega t). \quad (3.3)$$

Здесь $u_0$, $w_0$ и $\psi_0$ – неизвестные, вообще говоря, комплексные постоянные.

Построение потенциала $\varphi$ будет завершено, если воспользоваться формулами (2.4) и (3.2) в контактном условии (1.10). Отсюда непосредственно вытекает зависимость

$$\varphi = -\frac{\omega}{\lambda}\frac{J_0(i\lambda r)}{J_1(i\lambda R)}w_0 \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}}\,x\right\}\exp(i\omega t). \quad (3.4)$$

Следовательно, пользуясь выражением (1.9), заключаем, что

$$q = i\frac{\rho_1^0\omega^2}{\lambda}\frac{J_0(i\lambda R)}{J_1(i\lambda R)}w_0 \exp\left\{-i\sqrt{\lambda^2 + \frac{\omega^2}{a^2}}\,x\right\}\exp(i\omega t). \quad (3.5)$$

Дальнейшая подстановка формул (3.1)–(3.5) в систему уравнений движения оболочки (1.8) дает для коэффициентов $u_0$, $w_0$ и $\psi_0$ систему трех линейных однородных алгебраических уравнений, содержащих в качестве параметра $\omega$. Вводя следующие обозначения:

$$k(\lambda)=\gamma_1\left\{\rho R-\mu\frac{J_0(i\lambda R)}{(i\lambda)J_1(i\lambda R)}\right\},$$

$$\gamma_1=\frac{E_1}{E_2},\quad \gamma_2=\frac{E_1}{G},\quad \mu=\frac{R}{2h},\quad \rho=\frac{\rho_*}{\rho_1^0},\quad \varepsilon=\frac{h^2}{3R^2},\quad c_0^2=\frac{E_2h}{2R\rho_1^0},$$

приходим к уравнениям:

$$\left\{-\left(\lambda^2+\frac{\omega^2}{a^2}\right)+\frac{1-\nu_1\nu_2}{4\mu c_0^2\gamma_1}\rho\omega^2\right\}u_0-\frac{i\nu_2}{R}\sqrt{\lambda^2+\frac{\omega^2}{a^2}}\,w_0=0,$$

$$i\nu_1\sqrt{\lambda^2+\frac{\omega^2}{a^2}}\,u_0+\left\{-\frac{1}{R}+\frac{1-\nu_1\nu_2}{4\mu c_0^2\gamma_1}k(\lambda)\omega^2\right\}w_0+iR^3\varepsilon\gamma_1\left(\lambda^2+\frac{\omega^2}{a^2}\right)^{3/2}\psi_0=0,$$

$$-i\sqrt{\lambda^2+\frac{\omega^2}{a^2}}\,w_0+\left\{1+\frac{R^2}{1-\nu_1\nu_2}\varepsilon\gamma_2\left(\lambda^2+\frac{\omega^2}{a^2}\right)\right\}\psi_0=0. \qquad (3.6)$$

Из условия существования нетривиальных решений для $u_0$, $w_0$ и $\psi_0$, имеем равенство нулю определителя системы (3.6):

$$\det\delta_{ij}=0. \qquad (3.7)$$

Раскрывая (3.7), получим следующее дисперсионное уравнение, окончательный вид которого будет содержать только четные степени $\omega$:

$$a_0\omega^6+a_1\omega^4+a_2\omega^2+a_3=0. \qquad (3.8)$$

Здесь

$$a_0=\frac{R^2}{a^2}\varepsilon\gamma_2\left\{\frac{1-\nu_1\nu_2}{4\mu c_0^2\gamma_1}\left[\left(\frac{\rho}{4\mu c_0^2\gamma_1}-\frac{1}{1-\nu_1\nu_2}\frac{1}{a^2}\right)k(\lambda)-\rho\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{R}{a^2}\right]+\frac{R}{a^4}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right\},$$

$$a_1=\frac{(1-\nu_1\nu_2)\rho}{16\mu^2c_0^4\gamma_1^2}k(\lambda)\{1-\nu_1\nu_2+R^2\lambda^2\gamma_2\varepsilon\}-\frac{1-\nu_1\nu_2}{4\mu c_0^2\gamma_1a^2}k(\lambda)\left\{1+2\frac{R^2\varepsilon\gamma_2}{1-\nu_1\nu_2}\lambda^2\right\}+$$

$$+\frac{R\varepsilon}{a^4}\{\gamma_2+3R^2\lambda^2\gamma_1\}-\frac{R\varepsilon\rho}{4\mu c_0^2\gamma_1a^2}\{\gamma_2+2(1-\nu_1\nu_2)R^2\lambda^2\gamma_1\},$$

$$a_2=-\frac{1-\nu_1\nu_2}{4\mu c_0^2\gamma_1}\left\{\frac{\rho}{R}+k(\lambda)\lambda^2+\rho\varepsilon\gamma_1R^3\lambda^4\right\}-\frac{R\varepsilon\gamma_2\lambda^2}{4\mu c_0^2\gamma_1}\{\rho+Rk(\lambda)\lambda^2\}+$$

$$+\frac{R}{a^2}\left\{\frac{1-\nu_1\nu_2}{R^2}+2\varepsilon\gamma_2\lambda^2\right\}+3\varepsilon\gamma_1R^3\lambda^4\frac{1}{a^2},$$

$$a_3=R\lambda^2\left\{\frac{1-\nu_1\nu_2}{R^2}+\varepsilon\gamma_2\lambda^2+\varepsilon\gamma_1R^2\lambda^4\right\}.$$

Таким образом, получена общая зависимость (3.8), характеризующая волновое течение пузырьковой жидкости в оболочке из композитного материала.

## 4. Структура смеси

Конкретизируем жидкость и рассмотрим смесь, состоящую из воды, содержащей небольшие добавки пузырьков воздуха $\alpha_2 = \{10^{-2}–10^{-1}\}$. Такая схематизация весьма важна, так как вода определяющим образом влияет на протекание многих физико-химических, биологических и технологических процессов. С другой стороны, в ней всегда есть примеси, в частности пузырьки воздуха. Далее примем, что [4]

$$\rho_1^0 = 1\,\text{г}/\text{см}^3, \quad (\rho_2^0 = 10^{-3}\,\text{г}/\text{см}^3), \quad p = 0{,}1\,\text{МПа}.$$

Выбранные выше параметры позволяют заключить, что величина равновесной скорости $a$, определяемая формулой (1.7), может быть значительно меньше не только скорости звука в воде, но и скорости звука в воздухе. Для принятой смеси $a = 10^4$ см/с при $\alpha_2 = 10^{-2}$, $a \approx 5\cdot10^3$ см/с при $\alpha_2 = 5\cdot10^{-2}$ и $a \approx 3{,}16\cdot10^3$ см/с при $\alpha_2 = 10^{-1}$ (для сравнения скорость звука в воде $1{,}5\cdot10^5$ см/с, в воздухе – $3{,}4\cdot10^4$ см/с). Следовательно, из (1.6) и (1.7) следует, что плотность смеси практически не меняется, в то время как равновесная скорость звука меняется существенно – среда обладает сильной физической нелинейностью.

## 5. Численный эксперимент и выводы

Примем соответствующие задаче характерные геометрические ($R = 4$ см, $h = 0{,}1$ см) и опытные физико-механические данные:

а) изотропный случай $\gamma_1 = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$, $G = E/(2(1+\nu))$, $\gamma_2 = 2(1+\nu)$;

б) первый вариант ортотропии $\gamma_1 = 1/3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}1$;

в) второй вариант ортотропии $\gamma_1 = 1/3$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$,

причем для двух случаев ортотропии диапазон изменения $\gamma_2$ определяется следующим образом [7]: $0{,}7 < \gamma_2 \le 10$, а применительно к оболочке из резины $E_2 = 0{,}4$ МПа, $\rho_* = 2$ г/см$^3$. В качестве примера рассмотрим два предельных случая для длинных и коротких волн.

**Приближение в случае длинных волн.** При $\lambda R \ll 1$ имеем следующие асимптотические равенства

$$J_0(i\lambda R) \approx 1, \quad J_1(i\lambda R) \approx \frac{1}{2} i\lambda R,$$

из которых следует, что функция $k(\lambda)$ приближенно записывается в виде

$$k(\lambda) \approx \gamma_1 \frac{2\mu}{\lambda^2 R}.$$

На графиках рис. 1 (буквы у кривых соответствуют различным случаям упругости) представлены зависимости безразмерных частот волны в оболочке $\Omega_2 = \omega_2 t_0$ ($t_0 = \mathrm{R}/c_0$ – характерное время) от $\alpha_2$ при $\lambda = 10^{-2}$, причем для двух случаев ортотропии ($\gamma_2 = 3$) они практически совпадают. Соответствующие зависимости для частот волны в жидкости $\Omega_1 = \omega_1 t_0$ отличаются весьма незначительно. Приведем их некоторые значения при различных $\alpha_2$ во всех трех случаях упругости:

$$\Omega_1 \approx 0{,}057 \text{ при } \alpha_2 = 0 \quad \text{и} \quad \Omega_1 \approx 0{,}06 \text{ при } \alpha_2 = 10^{-1}.$$

Для двух вариантов ортотропии при фиксированном $\alpha_2$ влияние $\gamma_2$ в диапазоне его изменения на значения $\Omega_1$ и $\Omega_2$ несущественно.

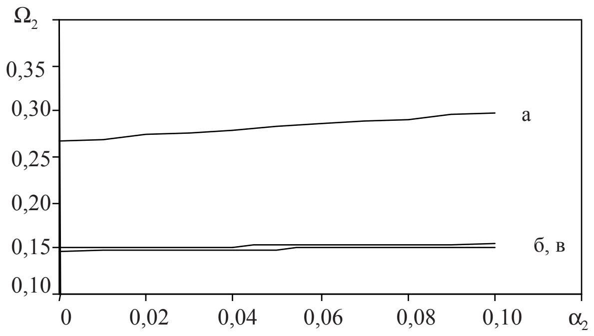


Рис. 1

**Приближение в случае коротких волн.** Вначале перепишем функцию $k(\lambda)$, положив

$$I_n(\lambda R) = \begin{cases} J_0(i\lambda R), & \text{если } n = 0, \\ i^{-1} J_1(i\lambda R), & \text{если } n = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$k(\lambda) = \gamma_1 \left\{ \rho R + \frac{\mu}{\lambda} \frac{I_0(\lambda R)}{I_1(\lambda R)} \right\}.$$

В этом предельном случае, когда $\lambda \gg 1$,

$$I_n(\lambda R) \approx \frac{e^{\lambda R}}{\sqrt{2\pi\lambda R}} \left\{ 1 + O\left( \frac{1}{\lambda R} \right) \right\}$$

и можно принять

$$k(\lambda) \approx \gamma_1 \left\{ \rho R + \frac{\mu}{\lambda} \right\}.$$

На рис. 2 помещены данные вычислений, относящиеся к кривым $\Omega_2(\alpha_2)$, для $\lambda = 10$.

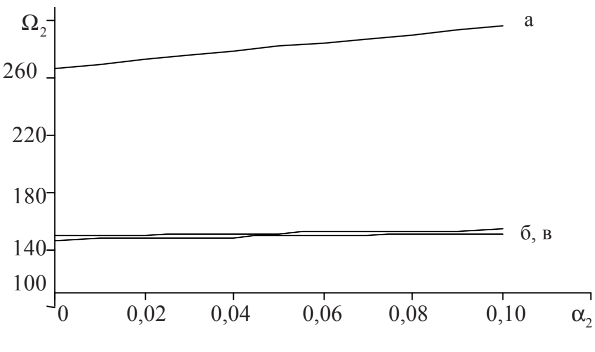


Рис. 2

Приведем соответствующие зависимости для $\Omega_1$:
– для изотропного случая

$$\Omega_1 \approx 98{,}78 \text{ при } \alpha_2 = 0 \text{ и } \Omega_2 \approx 101{,}94 \text{ при } \alpha_2 = 10^{-1},$$

– для двух случаев ортотропии ($\gamma_2 = 3$)

$$\Omega_1 \approx 54{,}37 \text{ при } \alpha_2 = 0 \text{ и } \Omega_2 \approx 55{,}27 \text{ при } \alpha_2 = 10^{-1}.$$

На рис. 3 приведены вычисления для зависимости $\Omega_1$ от $\gamma_2$, которые совпадают для принятых случаев ортотропии. Аналогичная зависимость для $\Omega_2$ не приводится, так как она не зависит от $\gamma_2$. Заметим, что в обоих приближениях для численного решения дисперсионного уравнения (3.8) был использован итерационный метод деления отрезка пополам.

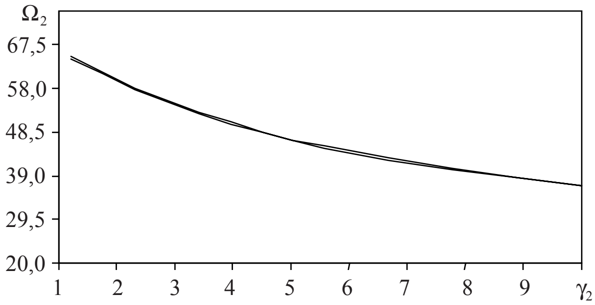


Рис. 3

Таким образом, проведенные вычисления позволяют сформулировать следующие основные выводы.

*В длинноволновом приближении*: с возрастанием объемного содержания пузырьков $\alpha_2$ частота $\Omega_2$ в оболочке увеличивается, что наиболее наглядно проявляется в изотропном случае (12%); учет ортотропии значительно снижает эту зависимость; аналогичные зависимости для $\Omega_1$ практически не зависят от $\alpha_2$ и совпадают для трех случаев упругости; $\Omega_1$ и $\Omega_2$ не зависят от параметра ортотропии $\gamma_2$.

*В приближении коротких волн*: с увеличением $\alpha_2$ увеличивается $\Omega_2$; зависимость $\Omega_1$ от $\alpha_2$ незначительна (3%), но весьма чувствительна при учете ортотропии; $\Omega_1$ значительно уменьшается с увеличением $\gamma_2$, соответствующая зависимость $\Omega_2$ не приводится, так как она не зависит от $\gamma_2$.

*Литература*


1. *Педли*, *Т.* Гидродинамика крупных сосудов / Т. Педли. – М., 1983. – 400 с.

2. *Вольмир*, *А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости / А.С. Вольмир. – М., 1979. – 320 с.

3. *Гузь*, *А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости / А.Н. Гузь. – Киев: «А.С.К.», 1998. – 349с.

4. *Нигматулин*, *Р.И.* Динамика многофазных сред. Ч. I / Р.И. Нигматулин. – М., 1987. – 464 с.

5. *Седов*, *Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1 / Л.И. Седов. – М., 1976. – 535 с.

6. *Амензаде*, *Р.Ю.* Влияние сдвига на волновые характеристики в ортотропной оболочке, содержащей жидкость / Р.Ю. Амензаде, А.Н. Ализаде, Н.Г. Дамиров // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. XIX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. – Н. Новгород. – 1999. – С. 26–29.

7. *Амбарцумян*, *С.А.* Теория анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян. – М., 1967. – 266 с.


[15.06.2009]

## WAVE PROPAGATION IN A SHELL OF A COMPOSITE MATERIAL CONTAINING A BUBBLE LIQUID

**R.Yu. Amenzade, E.T. Kiyasbeily, G.M. Salmanova**

The results of theoretically analyzing a linearized axisymmetric problem of a pulsed motion of a two-phase bubble liquid contained in an elastic orthotropic shell are presented. The mixture flow is described by a model of an ideal compressible barothropic medium, and equations of motion accounting for shear are used for the shell. A shell with flowing water containing small additions of air bubbles is studied as an example. One of the important dynamic problems of such a «shell-liquid» system is to determine frequencies and forms of natural vibrations. The effect of the volume percentage of the bubbles and the orthotropy on the wave characteristics is numerically found.

**Key words:** two-phase liquid, orthotropic shell, bubbles, harmonic waves, circular frequency.