

УДК 539.4

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СО СЛОЖНЫМИ СТРУКТУРАМИ АРМИРОВАНИЯ^{*)}

Ю.В. Немировский, А.П. Янковский

ИТПМ СО РАН, Новосибирск

Сформулирована задача упругопластического деформирования гибких пологих оболочек переменной толщины со сложными структурами армирования. Проведен качественный анализ поставленной задачи и указан путь ее линеаризации. Конкретные расчеты армированных пластин и пологих сферических оболочек показали, что несущая способность таких конструкций при упругопластическом деформировании в разы больше, чем при упругом деформировании; неучет гибкости тонкостенных композитных конструкций при их упругопластическом деформировании может приводить к существенному занижению оценки их несущей способности.

Ключевые слова: пологие оболочки, большие прогибы, армирование, упругость, пластичность, предразрушение, предельное нагружение.

Настоящая работа продолжает исследования, опубликованные авторами в [1], где рассматривалась проблема упругопластического деформирования пологих армированных оболочек в геометрически линейной постановке. Однако известно [2], что для многих фазовых материалов, составляющих, например, металлокомпозиции, остаточные деформации после разрыва имеют значения от нескольких до десятков процентов. Следовательно, металлокомпозитная тонкостенная конструкция прежде, чем в ней наступит состояние предразрушения хотя бы одного из фазовых материалов, будет испытывать значительные пластические деформации, и адекватный расчет такого изделия должен базироваться на соотношениях геометрически нелинейной теории деформирования оболочечных элементов конструкций. В связи с этим, данное исследование посвящено формулировке и разработке метода расчета задачи упругопластического деформирования гибких пологих оболочек со сложными структурами армирования.

Рассматривается гибкая полая оболочка переменной толщины $2H$, подчиняющаяся гипотезам Кирхгофа–Лява, состоящая из изотропной матрицы и внедренной в нее тонковолокнистой однородной арматуры постоянного или переменного поперечного сечения. Предполагается: оболочка по толщине имеет регулярную и квазиоднородную структуру; путь нагружения конструкции – квазистатический и несложный, поэтому для описания нелинейно-упругого или пластического поведения фазовых материалов используются соотношения деформационной теории пластич-

^{*)} Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 115).

ности; температура конструкции соответствует ее естественному состоянию.

С оболочкой связана ортогональная система координат x_1x_2z ; поверхность x_1x_2 ($z = 0$) совмещена со срединной поверхностью конструкции до деформирования, причем координатные линии x_1, x_2 совпадают с линиями главной кривизны этой поверхности, а z определяет расстояние от выбранной точки оболочки до срединной поверхности. Конструкция армирована N семействами волокон (возможно, различной физической природы), которые уложены по поверхностям, эквидистантным срединной поверхности (эквидистантное армирование), или по поверхностям, расстояния до которых от срединной поверхности по оси z изменяются пропорционально изменению $H(x_1, x_2)$ (неэквидистантное армирование).

Для формулировки задачи упругопластического деформирования весьма пологих армированных оболочек большого прогиба используем общеизвестные [3]:

– уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} F_{ii,i} + F_{ji,j} + q_i = 0, \quad M_{ii,i} + M_{ji,j} + m_i = Q_i \quad (j = 3 - i, i = 1, 2), \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} - R_1^{-1}F_{11} - R_2^{-1}F_{22} + (F_{11}w_{,1})_{,1} + (F_{22}w_{,2})_{,2} + \\ + (F_{12}w_{,2})_{,1} + (F_{21}w_{,1})_{,2} + q_z = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– соотношения, связывающие мембранные деформации e_{ij} и параметры искривления κ_{ij} срединной поверхности оболочки с перемещениями u_i, w :

$$e_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}R_i^{-1}w + 0,5w_{,i}w_{,j}, \quad \kappa_{ij} = -w_{,ij} \quad (i, j = 1, 2); \quad (2)$$

– определяющие соотношения, связывающие мембранные усилия F_{ij} и моменты M_{ij} в оболочке с деформациями e_{ij} и параметрами κ_{ij} :

$$\begin{aligned} F_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (A_{ijml}e_{ml} + B_{ijml}\kappa_{ml}) + E_{ij}, \\ M_{ij} = \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (B_{ijml}e_{ml} + C_{ijml}\kappa_{ml}) + D_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где коэффициенты $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$ и свободные члены E_{ij}, D_{ij} зависят от параметров армирования, толщины оболочки $2H$ и механических характеристик фазовых материалов, а при пластическом деформировании нелинейно зависят от e_{ml} и κ_{ml} .

Так как тонкая пологая оболочка подчиняется гипотезам Кирхгофа–Лява, то для определения $A_{ijml}, B_{ijml}, C_{ijml}$ и E_{ij}, D_{ij} можно использовать соотношения, полученные в [4] (не будем их здесь приводить в силу их громоздкости).

В случае неэквидистантного армирования весьма пологой тонкой оболочки непрерывными волокнами постоянного поперечного сечения между параметрами армирования существует связь, приближенно определяемая равенством [5]

$$(H\omega_k \cos \psi_k)_{,1} + (H\omega_k \sin \psi_k)_{,2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

которое при эквидистантном армировании редуцируется в равенство, получающееся из (4) формальным заданием $H = 1$.

К уравнениям и соотношениям (1)–(3) необходимо добавить общеизвестные граничные условия на кромках гибкой оболочки [3] (не будем их здесь приводить, так как они весьма разнообразны).

На той части кромки (обозначим ее Γ_k), на которой волокна k -го семейства,

имеющие постоянные поперечные сечения, входят в конструкцию, следует задать краевые условия [5]

$$\omega_k(\Gamma_k) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

необходимые для однозначного интегрирования уравнений (4).

Решение задачи об упругопластическом деформировании армированной оболочки должно удовлетворять прочностным ограничениям [1, 4]:

$$\begin{aligned} \sigma_*(x_1, x_2, \pm H) &\leq \sigma_0^*, \quad -\sigma_k^- \leq \sigma_k(x_1, x_2, \pm H) \leq \sigma_k^+, \\ \sigma_0^* &> 0, \quad \sigma_k^\pm > 0, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях и соотношениях (1)–(6) приняты обозначения: R_i – главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки; Q_i – перерезывающие усилия; q_i, q_z – приведенные распределенные нагрузки в направлениях x_i, z соответственно; m_i – приведенные распределенные изгибающие моменты, вызванные внешними нагрузками; w, u_i – прогиб и перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлениях x_i ($i = 1, 2$) соответственно; δ_{ij} – символ Кронекера; ω_i, Ψ_k – интенсивность и угол (отсчитываемый от направления координатной линии x_1) армирования волокнами k -го семейства; ω_{0k} – заданные на кромке Γ_k контурные функции; σ_*, σ_k – интенсивность напряжений в связующем и напряжения в волокнах k -го семейства, определяемые по формулам, приведенным в [4] с учетом (2); σ_0^* – предел прочности связующего, равный пределу текучести σ_s при упругом деформировании или временному сопротивлению σ_y при упругопластическом деформировании; σ_k^-, σ_k^+ – пределы прочности волокон k -го семейства при сжатии и растяжении соответственно (при воздействии сжимающих нагрузок может возникнуть некоторая форма неустойчивости волокон, поэтому в общем случае $\sigma_k^- \neq \sigma_k^+$); нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной x_j .

Для получения системы разрешающих уравнений упругопластического деформирования гибких армированных пологих оболочек и соответствующих ей статических граничных условий в прогибах и перемещениях необходимо выражения для e_{ij}, κ_{ij} из (2) подставить в (3), а последние – в уравнения равновесия (1) и граничные условия и исключить из рассмотрения поперечные силы Q_i . Тогда три уравнения равновесия примут вид (2.1) из [1], в которых следует принять параметры Ламе $A_1 = A_2 = 1$, а в левых частях этих уравнений нужно учесть дополнительные слагаемые, порожденные геометрической нелинейностью задачи:

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &\equiv \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 A_{iill} w_{,l}^2 + A_{ii12} w_{,1} w_{,2} \right)_i + \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 A_{iill} w_{,l}^2 + A_{ij12} w_{,1} w_{,2} \right)_{,j} \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2), \\ \bar{q}_z &\equiv \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 B_{iill} w_{,l}^2 + B_{ii12} w_{,1} w_{,2} \right)_{,i} + \left(\frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 B_{inll} w_{,l}^2 + B_{in12} w_{,1} w_{,2} \right)_{,n} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \left\{ \sum_{j=1}^2 w_{,j} \left[\sum_{l=1}^2 \left(A_{ijll} \left(u_{l,i} + \frac{w}{R_l} + 0,5 w_{,l}^2 \right) - B_{ijll} w_{,ll} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+A_{ij12}(u_{1,2} + u_{2,1} + w_{,1}w_{,2}) - 2B_{ij12}w_{,12} + E_{ij} \Big\} \Big\} \Big\} \quad (n = 3 - i). \quad (7)$$

В теории весьма пологих гибких оболочек статические граничные условия на кромке $x_i = \text{const}$ могут быть заданы с помощью линейных комбинаций величин вида (2.2) из [1], в которых также следует принять $A_1 = A_2 = 1$, а в левых частях этих соотношений нужно учесть дополнительные слагаемые

$$\begin{aligned} \bar{F}_{ii}^0 &\equiv \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 A_{iilm} w_{,l} w_{,m}, \quad \bar{M}_{ii}^0 \equiv \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 B_{iilm} w_{,l} w_{,m}, \\ \bar{F}_{ij}^0 &\equiv \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 A_{ijlm} w_{,l} w_{,m} + \frac{1}{2R_j} \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 B_{ijlm} w_{,l} w_{,m} - \\ &- w_{,ij} \left\{ \sum_{l=1}^2 \left[B_{ijll} \left(u_{l,l} + \frac{w}{R_l} + 0,5w_{,l}^2 \right) - C_{ijll} w_{,ll} \right] + \right. \\ &\left. + B_{ij12}(u_{1,2} + u_{2,1} + w_{,1}w_{,2}) - 2C_{ij12}w_{,12} + D_{ij} \right\}, \quad (8) \\ \bar{Q}_i^0 &\equiv \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 B_{iilm} w_{,l} w_{,m} \right)_{,i} + \left(\sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 B_{ijlm} w_{,l} w_{,m} \right)_{,j} + \\ &+ w_{,i} \left\{ \sum_{l=1}^2 \left[A_{iill} \left(u_{l,l} + \frac{w}{R_l} + 0,5w_{,l}^2 \right) - B_{iill} w_{,ll} \right] + A_{ii12}(u_{1,2} + u_{2,1} + w_{,1}w_{,2}) - \right. \\ &\left. - 2B_{ii12}w_{,12} + E_{ii} \right\}, \quad j = 3 - i, i = 1, 2. \end{aligned}$$

(Уравнения равновесия и статические граничные условия в полном разрешающем виде здесь не приведены в силу их громоздкости.)

Кинематические граничные условия на кромке $x_i = \text{const}$ могут быть заданы с помощью линейных комбинаций величин

$$u_l = u_l^0 \quad (l = 1, 2), \quad w = w_0, \quad -w_{,i} + R_i^{-1}u_i = \vartheta_i^0, \quad (9)$$

где $u_l^0, w_0, \vartheta_i^0$ – заданные на кромке функции.

В случае, когда контур, ограничивающий пологую оболочку, не совпадает с одной из координатных линий $x_i = \text{const}$, статические и кинематические граничные условия, записанные в перемещениях, существенно усложняются [3] по сравнению с (9) и (2.2) из [1] (с учетом (8)), поэтому не будем этот случай рассматривать более подробно.

Если толщина оболочки $2H$ и траектории армирования (т.е. углы ψ_k) заданы, то краевая задача (4), (5) определяет интенсивность ω_k армирования волокнами k -го семейства. (Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных первого порядка (4) хорошо изучены [6], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно; отметим лишь, что уравнение (4) имеет действительные характеристики, совпадающие с траекториями армирования k -го семейства.) Если

функции ψ_k, ω_k, H известны (заданы), то три уравнения равновесия (2.1) из [1] с учетом (7) замкнуты относительно трех функций u_1, u_2, w . Этой системе квазилинейных дифференциальных уравнений эллиптического типа соответствуют линейные (9) и нелинейные (2.2) из [1] (с учетом (8)) граничные условия.

Основная трудность, возникающая при решении сформулированной граничной задачи упругопластического деформирования гибких пологих армированных оболочек, заключается в ее существенной нелинейности, которая имеет двоякое происхождение: механическое (в силу нелинейного поведения материалов фаз композиции) и геометрическое (в силу возможного появления больших прогибов). Для линеаризации геометрической составляющей нелинейности рассматриваемой задачи используем метод простой итерации, хорошо зарекомендовавший себя, по крайней мере, при решении линейно-упругих задач для тонкостенных конструкций со сложными структурами армирования [7]. При этом нелинейные слагаемые (7), (8) переносятся в правые части соотношений (2.1), (2.2) из [1] соответственно и рассматриваются как возмущения распределенных и контурных нагрузок, известные из решения на предыдущей итерации. Для линеаризации же механической составляющей нелинейности этой задачи используем итерационный процесс, предложенный в [4] и являющийся адаптацией метода переменных параметров упругости применительно к деформируемым тонкостенным композитным конструкциям. Так как после применения указанных способов линеаризации на каждой итерации приходится решать линейную граничную задачу, формально схожую с геометрически линейной задачей линейно-упругого деформирования слоистых анизотропных и неоднородных пологих оболочек со слоями переменной толщины [3], то для интегрирования такой граничной задачи можно использовать уже известные и хорошо разработанные конечно-разностные схемы, методы конечных элементов или другие приближенные вариационные методы. Не будем останавливаться на обсуждении этого вопроса более подробно.

Используя общеизвестные формулы [3] перехода от прямоугольной декартовой системы координат к цилиндрической, можно уравнения и соотношения (1)–(9) записать в полярной системе координат, которая удобна при рассмотрении круговых или кольцевых в плане сферических пологих оболочек, широко используемых на практике. (Не будем здесь приводить соответствующие соотношения в силу их громоздкости.)

В качестве примера рассмотрим упругопластическое деформирование сферических пологих оболочек постоянной толщины $2H = 4$ см, кромки которых в плане определяются радиусами $r_0 = 0,1$ м, $r_1 = 0,5$ м. Внутренние кромки ($r = r_0$) оболочек жестко защемлены, а внешние кромки ($r = r_1$) – свободны от нагружения. На оболочки действует равномерная поперечная нагрузка (давление) $q_z = -p = \text{const} < 0$ ($q_1 \equiv q_2 \equiv 0$).

Радиус R сферической оболочки связан со стрелой подъема f полюсной точки над плоскостью, определяющей нижнюю (внешнюю) кромку оболочки ($r = r_1$), следующей формулой:

$$R = \frac{1}{2f}(r_1^2 + f^2). \quad (10)$$

Уровень нагрузки p будем подбирать из условий, чтобы хоть в одном из фазовых материалов достигалось начальное пластическое состояние ($p = p_s$) – упругое дефор-

мирование – или напряженное состояние достигало предела временного сопротивления ($p = p_y$) – упругопластическое деформирование (состояние предразрушения).

Рассматриваются композитные оболочки и пластины, изготовленные из магниевого сплава МЛ12 и меридионально-симметрично армированные двумя ($N = 2$) семействами углеродных волокон ЛУ-4 по логарифмическим спиральям ($\omega_1(r) = \omega_2(r)$, $\psi_1(r) = -\psi_2(r) = \psi = \text{const}$, $r \equiv x_1$ – полярный радиус). Механические характеристики фазовых материалов приведены в таблице, где E , ν , δ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и величина остаточного относительного удлинения при разрыве соответственно (волокна ЛУ-4 ведут себя упруго-хрупко).

Механические характеристики фазовых материалов [2]

Материал	E , ГПа	σ_s , МПа	σ_y , МПа	δ , %	ν
Сплав МЛ12	44	140	250	8	0,31
Волокна ЛУ-4	250	–	3250	–	–

Так как армирование предполагается осесимметричным по логарифмическим спиральям, то интенсивности армирования ω_k в силу $\psi_k = \psi = \text{const}$ определяются равенствами [5]

$$\omega_1(r) = \omega_2(r) = \omega_{01}r_0/r, \quad \omega_{01} \equiv \omega_1(r_0). \quad (11)$$

В расчетах примем на внутренней кромке $\omega_{01} = \omega_{02} = 0,35$, то есть $\omega_{01} + \omega_{02} = 0,7$, что на практике соответствует удельной суммарной плотности армирования, близкой к предельно допустимой. При этом общий расход арматуры в рассматриваемых конструкциях с таким армированием остается постоянным.

На рис. 1 изображены зависимости предельных давлений p_s при упругом (кривые 3, 3') и p_y при упругопластическом (остальные линии) деформировании от угла ψ спирального армирования пластин и пологих оболочек. На этом рисунке сплошные кривые 1–3 получены для пологих оболочек ($f = 6$ см), а штриховые линии 1'–4' – для пластин ($f = 0$, $R \rightarrow \infty$, см. (10)). Кривые 1, 3 и 1', 3' рассчитаны с учетом геометрической нелинейности задачи, остальные линии – в рамках геометрически линейной постановки, причем кривая 4' определена методом линейного программирования на основе жесткопластической модели армированного материала [8].

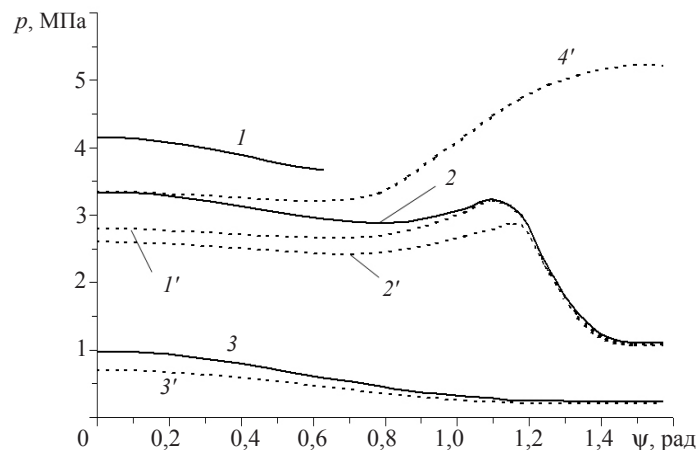


Рис. 1

Кривые 3, 3' характеризуют значения нагрузки p_s , при которой возникают начальные пластические деформации на верхней лицевой поверхности соответствующей тонкостенной конструкции в точках внутренней кромки ($r = r_0$). Определение зависимостей $p_s(\psi)$ в рамках геометрически линейной теории приводит к линиям, которые визуально не отличаются от кривых 3, 3'. Следовательно, в рамках линейно-упругого расчета учет геометрической нелинейности задачи для конструкций рассматриваемой геометрии не приводит к принципиальному уточнению уровней предельно допустимого нагружения.

Сравнение кривых 1, 2 с линией 3 и кривых 1', 2' с линией 3' показывает, что несущая способность пологих оболочек и пластин при упругопластическом деформировании в разы выше, чем при упругом деформировании, что объясняется более полным использованием несущей способности фазовых материалов. (Из таблицы следует, что предельная упругая деформация $\epsilon_s = \sigma_s/E$ волокон ЛУ-4 в 4,09 раза больше той же величины связующего. Следовательно, при упругом деформировании напряжения в арматуре такой композиции не превышают 24,5% предела прочности σ_y ($\equiv \sigma_s$) упруго-хрупких волокон.)

Как видно из рис. 1, линия 1 лежит выше кривой 2. (Линия 1 построена не на всем рассматриваемом интервале $0 \leq \psi < \pi/2$, так как при $\psi > 0,65$ нарушается сходимость используемого итерационного процесса; в последнем случае нужно использовать более «мощные» итерационные процедуры, чем метод простой итерации.) Следовательно, неучет геометрической нелинейности задачи в рамках упругопластического расчета тонкостенной армированной конструкции может привести к существенному и неоправданному снижению оценки ее расчетной несущей способности. (Аналогичный эффект, но в несколько меньшей степени, наблюдается и при расчете пластин: ср. поведение кривых 1', 2' на рис. 1.)

Линии 1', 2, 2' на рис. 1 ведут себя немонотонно и имеют два ярко выраженных участка. Левым участкам этих кривых $0 \leq \psi < 1,1$ соответствует начало разрушения упруго-хрупких волокон в точках пересечения верхних ($z = H$) лицевых поверхностей соответствующих конструкций с торцевыми поверхностями внутренних кромок ($r = r_0$), а правым участкам ($\psi > 1,1$) – начало разрушения пластически деформируемого связующего в тех же точках.

Точки максимумов на кривых рис. 1 соответствуют рациональным углам армирования пологих оболочек и пластин. Линии 1, 2, 3, 3' имеют максимумы при $\psi = 0$ – радиальное или меридиональное армирование; кривая 4' – при $\psi = \pi/2$ (в обоих случаях – это армирование по одному из направлений главных напряжений и деформаций); линии 2, 2' – при $\psi \approx 1,1$ – спиральное армирование. Следовательно, не всегда армирование по направлениям главных напряжений и деформаций обеспечивает максимум несущей способности конструкции при фиксированном расходе фазовых материалов. Максимумы кривых 1', 3' на рис. 1 реализуются в разных точках, поэтому не всегда наилучшая при упругом деформировании структура армирования будет также наилучшей и при упругопластическом деформировании.

Кривая 4' рассчитана на основе жесткопластической модели [8] и приведена для сравнения с линией 2', полученной также в рамках геометрически линейной постановки, но на базе деформационной теории пластичности для фазовых материалов. Как видно, кривая 4' при $0 \leq \psi < \pi/4$ дает завышение предельной нагрузки примерно на 30%, а при $\pi/4 < \psi < \pi/2$ – в разы. Такое завышение предельной нагрузки, определенной в рамках жесткопластической модели, объясняется тем, что

в реальности углеродные волокна ЛУ-4 являются упруго-хрупкими и при деформациях, превышающих ε_s , эти волокна разрушаются и напряжения в них формально равны нулю. В рамках жесткопластической модели этим волокнам необоснованно навязывается свойство идеальной пластичности, когда при деформациях $\varepsilon > \varepsilon_s$ напряжения в армирующих волокнах $|\sigma_k| = \sigma_s \gg 0$, что не соответствует реальности и приводит к искусственному завышению несущей способности конструкции. Расчеты, проведенные авторами для металлокомпозитных пластин, все фазовые материалы которых могут вести себя пластично, показали, что соответствующие кривые предельного нагружения, рассчитанные по теории предельного состояния (жесткопластическая модель) и по теории упругопластических деформаций на интервале $0 \leq \psi < \pi/4$ визуальнo практически не отличаются, а при углах армирования $\pi/4 < \psi < \pi/2$ по-прежнему наблюдается существенное расхождение, подобное «вилке», порожденной кривыми 2', 4' на рис. 1 при $\pi/4 < \psi < \pi/2$. Последнее обстоятельство авторам пока объяснить не удалось, по-видимому, оно порождено специфическими особенностями структурных моделей полиармированного слоя, используемых в данном исследовании и в [8].

Таким образом, поведение кривых 2', 4' на рис. 1 позволяет заключить, что определение допустимых нагрузок по теории предельного состояния (линия 4') для тонкостенных композитных конструкций, фазовые материалы которых являются упруго-хрупкими, приводит к значительному их (нагрузок) завышению и не может быть рекомендовано при расчетах, как это предлагается делать в работах [9, 10].

На рис. 2 изображены зависимости $w(\psi)$ при нагрузках $p(\psi)$, приведенных на рис. 1. (Линии с одинаковыми номерами на рис. 1, 2 рассчитаны при одних и тех же условиях.) На рис. 2 по оси ординат отложены прогибы w , определенные в точках внешней кромки ($r = r_1$), что соответствует максимальным по модулю прогибам тонкостенных конструкций при фиксированных структурах армирования (заданных ψ). Кривые на рис. 2 характеризуют податливость рассматриваемых тонкостенных конструкций в зависимости от угла спирального армирования ψ . Анализ поведения кривых на этом рисунке (с учетом поведения кривых на рис. 1) позволяет выбрать такие структуры армирования, которые при уровнях предельного нагружения обеспечивают наибольшую или наименьшую податливость соответствующей конструкции.

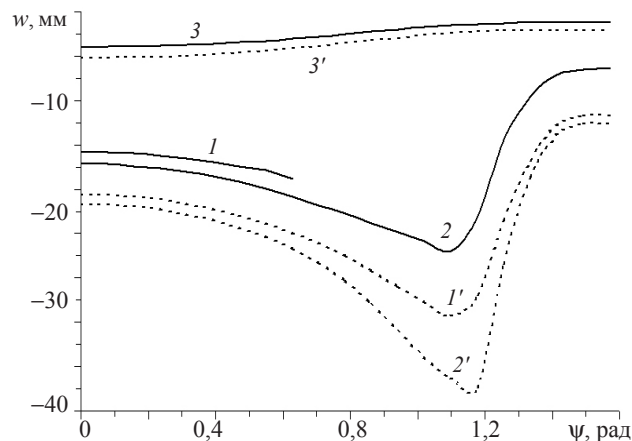


Рис. 2

На рис. 3 изображены следы упругопластических границ в меридиональных (радиальных) сечениях в связующем (арматура ведет себя упруго-хрупко) рассматриваемых конструкций при угле армирования $\psi = \pi/5$. По оси абсцисс отложена безразмерная естественная координата вдоль меридиана (радиуса), по оси ординат – безразмерная поперечная координата. Номера всех кривых на рис. 3 помечены штрихом или двумя штрихами. Между кривыми с одинаковыми номерами лежит упругая зона, выше кривых с одним штрихом расположены верхние пластические зоны, а ниже линий с двумя штрихами – нижние пластические зоны. Сплошные кривые соответствуют расчету гибких тонкостенных конструкций, а штриховые линии получены в рамках геометрически линейной теории. Кривые $1', 1'', 2', 2''$ относятся к пластине ($f=0$), а линии $3', 3'', 4', 4''$ – к пологой оболочке ($f=6$ см). Штриховые линии $1', 1''$ получены для пластины в геометрически линейной постановке; в этом случае реализуется поперечный изгиб в конструкции, поэтому линии $1', 1''$ симметричны относительно оси абсцисс. Сплошные линии $2', 2''$ получены также для пластины, но уже с учетом ее гибкости, поэтому кривые $2', 2''$ не симметричны относительно прямой $z=0$, так как в рамках геометрически нелинейной теории в пластине реализуется случай продольно-поперечного изгиба.

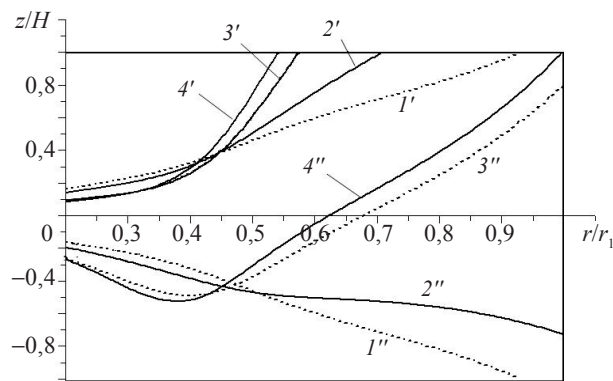


Рис. 3

Сопоставление кривых $3', 3'', 4', 4''$ (рассчитанных для пологой оболочки) с линиями $1', 1'', 2', 2''$ соответственно позволяет проследить за качественным и количественным изменением положения упругопластических границ в связующем пластины при ее искривлении («превращении» в пологую оболочку) в рамках геометрически линейной и нелинейной постановок задач. Все кривые с одинаковыми номерами на рис. 3 в окрестности точки $r = 0,2r_1$ резко сближаются, что характеризует напряженное состояние в связующем, близкое к пластическому шарниру на внутренней защемленной кромке.

Кривые $1, 2$ на рис. 1 всюду лежат выше линий $1', 2'$ соответственно, следовательно, искривление пластины приводит к повышению ее несущей способности при нагружении в поперечном направлении. В связи с этим целесообразно проследить за изменением уровня предельно допустимой поперечной однородной нагрузки $q_z = -p_y$ в зависимости от величины стрелы подъема f пологой оболочки, которая связана с радиусом ее кривизны равенством (10). На рис. 4 изображены зависимости $p_y(f)$ для меридионально армированных ($\psi = 0$) пологих оболочек прежней толщины, прежней в плане геометрии и прежнем расходе арматуры ($\omega_{01} = \omega_{02} = 0,35$ в (11)).

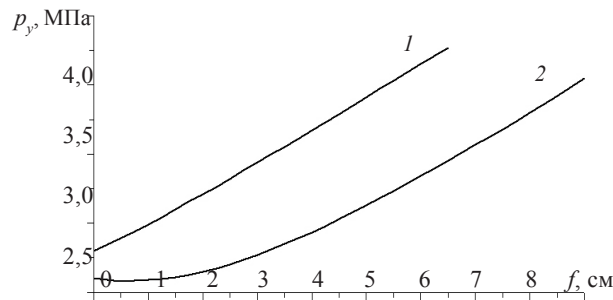


Рис. 4

Кривая 1 характеризует зависимость $p_y(f)$ для гибких оболочек, а линия 2 – для оболочек, рассчитанных в рамках геометрически линейной постановки. Обе кривые на рис. 4 монотонно возрастают. Это означает, что с увеличением кривизны пологой оболочки (с увеличением f) возрастает и ее сопротивление поперечному нагружению как в рамках геометрически линейной, так и геометрически нелинейной теорий оболочек. Как видно из рис. 4, решение по геометрически линейной теории (линия 2) дает заниженные расчетные значения предельно допустимых уровней нагружения, причем это занижение может быть значительным и оно тем больше, чем меньше относительная толщина тонкостенной конструкции.

Проведенный анализ деформирования гибких и негибких пластин и пологих оболочек показывает, что учет упругопластического поведения фазовых материалов позволяет в разы увеличить оценку несущей способности армированной конструкции по сравнению со случаем упругого деформирования. Неучет гибкости тонкостенной композитной конструкции при ее упругопластическом деформировании может привести к существенному занижению оценки уровней ее предельно допустимого нагружения в состоянии предразрушения одной или всех фаз композиции. Не всегда армирование по направлениям главных напряжений и деформаций является наилучшим. Не всегда структуры, рациональные при упругом деформировании конструкции, являются наилучшими и при упругопластическом ее деформировании. Увеличение кривизны пологой оболочки приводит к увеличению ее сопротивляемости поперечному нагружению.

Литература

1. Немировский, Ю.В. Упругопластическое деформирование пологих армированных оболочек при термосиловом нагружении / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. – 2007. – №2. – С. 3–17.
2. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
3. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
4. Немировский, Ю.В. Термоупругопластический изгиб сложно армированных пластин / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 715–742.
5. Немировский, Ю.В. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 2. – С. 20–40.
6. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. – М.: Наука, 1966. – 260 с.

7. *Голушко, С.К.* Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С.К. Голушко, Ю.В. Немировский. – М.: Физматлит, 2008. – 432 с.
8. *Немировский, Ю.В.* Влияние структуры армирования и формы профиля на предельное равновесие поперечно изгибаемых кольцевых пластин / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Вестник ННГУ. Серия Механика. – 2006. – Вып. 1 (7). – С. 123–133.
9. *Васильев, В.В.* Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов / В.В. Васильев, А.Н. Елпатьевский. – М.: Машиностроение, 1972. – 168 с.
10. *Ржаницын, А.Р.* Предельное равновесие пластинок и оболочек / А.Р. Ржаницын. – М.: Наука, 1983. – 288 с.

[25.09.2009]

ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF FLEXIBLE FLAT SHELLS WITH COMPLEX REINFORCEMENT GEOMETRIES

Yu.V. Nemirovsky, A.P. Yankovsky

The problem of elastoplastic deformation of flexible flat shells of variable thickness with complex reinforcement geometries is formulated. The problem is qualitatively analyzed, the way of its linearization is shown. The results of particular calculations of reinforced plates and flat spherical plates have shown that the carrying capacity of such structures under elastoplastic deformation is several times as high as that under elastic deformation; taking no account of the flexibility of thin-walled composite structures may result in substantially underestimating their carrying capacity.

Key words: flat shells, large deflections, reinforcement, elasticity, plasticity, pre-failure, ultimate loading.