

УДК 539.3

**ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ТЕПЛООВОГО КОНТАКТА ПОКРЫТИЯ
И УПРУГОЙ ПОДЛОЖКИ НА ТЕРМОУПРУГОДИНАМИЧЕСКУЮ
НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО
ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА***

© 2017 г. **Митрин Б.И.^{1,2}, Зеленцов В.Б.¹, Игумнов Л.А.²**

¹*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

²*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

boris.mitrin@gmail.com

Поступила в редакцию 06.12.2016

Рассматривается скольжение с постоянной скоростью жесткого тела по поверхности термоупругого покрытия на упругой подложке из другого материала при наличии на контакте трения и фрикционного тепловыделения. На границе между покрытием и подложкой задается условие либо теплоизоляции, либо неограниченного теплового потока. Решение соответствующих задач термоупругости получено в контурных квадратурах обратного преобразования Лапласа. При исследовании полюсов подынтегральных функций квадратур решения задачи устанавливаются области устойчивых и неустойчивых решений задачи и граница между ними, зависящая от параметров задачи. Проводится сравнение областей устойчивых и неустойчивых решений для указанных условий теплового контакта, а также для случая идеального теплового контакта.

Ключевые слова: термоупругая неустойчивость, скольжение, трение, динамика, покрытие, упругая подложка, условия теплового контакта.

Введение

Решения ряда задач теории термоупругости о скользящем фрикционном контакте жесткого тела с упругой полосой при некоторых граничных условиях становятся неустойчивыми по отношению к малым возмущениям параметров задач [1]. На практике это соответствует возникновению неустойчивого функционирования скользящего фрикционного контакта или термоупругой неустойчивости (thermoelastic instability, TEI). Исследованию условий возникновения TEI для различных конфигураций узлов трения скольжения посвящено множество работ [2–15] и др., в которых рассматривается устойчивость решения соответствующих квазистатических задач термоупругости. Сравнительно недавно было установлено [16, 17], что

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-38- 50192-мол_нр).

параметрическая область устойчивых решений задач о скользящем термофрикционном контакте в динамической постановке в пространстве безразмерных параметров может отличаться от области устойчивых решений в соответствующей квазистатической задаче, а температура приобретает колебательную составляющую с периодом, соответствующим времени прохождения упругой волны от контакта до контакта [18–21]. Исследование свойств решений нестационарных динамических задач термоупругости о скользящем контакте и исследование устойчивости этих решений представляют собой фундаментальную научную проблему.

В статьях [22–24] рассматривалась динамическая задача термоупругости о скольжении с постоянной скоростью жесткой полуплоскости по поверхности теплопроводного упругого покрытия, нижняя грань которого сцеплена с подложкой в виде теплопроводной упругой полуплоскости из другого материала, а на границе между покрытием и подложкой устанавливались условия идеального теплового контакта. Там же проводилось сравнение решений рассмотренной задачи с решением задачи для полосы, сцепленной с недеформируемой полуплоскостью [18].

Цель настоящей статьи – исследование влияния температурных условий на границе области сопряжения покрытия и подложки на термоупругую устойчивость решения динамической задачи о скользящем термофрикционном контакте жесткого тела с покрытием на упругой подложке из другого материала.

Постановка контактных задач

Для исследования влияния теплопроводности упругой подложки на изменение границ области неустойчивых решений в пространстве безразмерных параметров рассматриваются динамические задачи термоупругости А, Б в рамках плоской деформации о скольжении с постоянной скоростью жесткой полуплоскости по поверхности упругого теплопроводного покрытия, нижняя грань которого сцеплена с подложкой (основанием) в виде упругой полуплоскости II из другого материала (рис. 1).

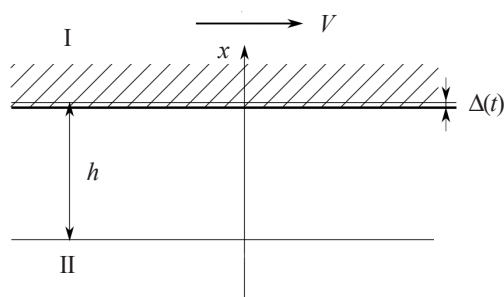


Рис. 1

Скольжение недеформируемой полуплоскости I по поверхности упругого покрытия на контакте происходит с учетом кулоновского трения и разогрева покрытия от трения. В задаче А на границе покрытия с подложкой поддерживается постоянная температура, совпадающая с начальной. В задаче Б тепловой поток из покрытия в подложку на границе с подложкой (упругой полуплоскостью II) равен нулю.

Граничные условия задачи А:

а) механические

$$u(h, t) = -\Delta(t), \quad (1)$$

$$u(0,t) = u_1(0,t), \quad (2)$$

$$\sigma(0,t) = \sigma_1(0,t); \quad (3)$$

б) температурные

$$K \frac{\partial T(h,t)}{\partial x} = -fV\sigma(h,t), \quad (4)$$

$$T(0,t) = 0, \quad (5)$$

где $u(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $T(x,t)$ – соответственно упругие смещения, напряжения и температура в покрытии; $u_1(x,t)$, $\sigma_1(x,t)$ – смещения и напряжения в подложке (упругой полуплоскости II); $\Delta(t)$ – закон внедрения жесткой полуплоскости I в покрытие; K – коэффициент теплопроводности материала покрытия; f – коэффициент трения; V – скорость скольжения.

Смещения $u_1(x,t)$ и напряжения $\sigma_1(x,t)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow -\infty$. Начальные условия задачи нулевые:

$$u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = T(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad \Delta(0) = 0; \quad (6)$$

$$u_1(x,0) = \frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x \leq 0. \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение термоупругости для расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) покрытия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad a = \sqrt{\frac{2\mu(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}; \quad (8)$$

уравнение теплопроводности для расчета изменения температуры в покрытии:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \quad (9)$$

уравнение теории упругости для расчета НДС упругой подложки:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \quad -\infty < x \leq 0, \quad t > 0, \quad a_1 = \sqrt{\frac{2\mu_1(1-\nu_1)}{\rho_1(1-2\nu_1)}}, \quad (10)$$

где μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, a – скорость продольной упругой волны, α – коэффициент теплопроводности, κ – коэффициент температуропроводности материала покрытия; μ_1 , ν_1 , ρ_1 , a_1 – соответствующие параметры материала подложки.

Постановка задачи Б сводится к тем же дифференциальным уравнениям и граничным условиям (1)–(10), что и задача А, в которых граничное условие (5) заменяется на

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Напряжения определяются из соотношений Дюамеля – Неймана:

$$\sigma(x,t) = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha T(x,t), \quad \sigma_1(x,t) = \frac{2\mu_1(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{\partial u_1}{\partial x}. \quad (12)$$

Закон внедрения жесткой полуплоскости I в поверхность покрытия $\Delta(t)$ имеет активную фазу внедрения на $0 < t < t_\varepsilon$ и пассивную фазу на $t_\varepsilon < t < \infty$ и принимается в виде

$$\Delta(t) = \Delta_0[(-1 + e^{\varepsilon t})H(t)H(t_\varepsilon - t) + H(t - t_\varepsilon)], \quad (13)$$

где Δ_0 ($0 < \Delta_0 < h$) – глубина максимального внедрения жесткой полуплоскости I в упругое покрытие, $t_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \ln 2$ ($\varepsilon > 0$) – время активной фазы внедрения, ε – параметр закона внедрения, $H(t)$ – функция Хэвисайда.

Решение задач А и Б

Решение поставленных задач А (1)–(10), Б (1)–(4), (6)–(11) с помощью интегрального преобразования Лапласа сводится к вычислению контурных квадратур обратного преобразования Лапласа. Подынтегральные функции полученных квадратур являются многозначными функциями, так как содержат точку ветвления в начале координат, и их вычисление приводит к формулам, аналогичным полученным в [23]:

$$T(x, t) = \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{\gamma \hat{V}}{\alpha h} \Delta_0 \sum_{k=1}^2 S_k(x, \tilde{t}) H((-1)^k (\tilde{t} - t_{\varepsilon k})), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \quad (14)$$

$$u(x, t) = -\Delta_0 \sum_{k=1}^2 S_k(x, \tilde{t}) H((-1)^k (\tilde{t} - t_{\varepsilon k})), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0; \quad (15)$$

$$\sigma(x, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \Delta_0 \left[\Omega(x, t) + \sum_{k=1}^2 (S_k(x, \tilde{t}) + S_k^0(x, t)) H((-1)^k (\tilde{t} - t_{\varepsilon k})) \right], \quad (16)$$

$$0 \leq x \leq h, \quad t > 0;$$

$$S_1(x, t) = G(x, t) + s_1(x, t), \quad (17)$$

$$S_2(x, t) = G(x, t) - 2G(x, t - t_{\varepsilon k}) + s_2(x, t), \quad (18)$$

$$G(x, t) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} [\theta^-(z_k^+) K'(z_k^+, x, t)] + \sum_{k=0}^{\infty} [\theta^-(\zeta_k) K'(\zeta_k, x, t)], \quad (19)$$

$$s_1(x, t) = K(\varepsilon t_\kappa, x, t) - K(0, x, 0) + J_1(x, t),$$

$$s_2(x, t) = K(0, x, 0) + J_2(x, t),$$

$$K(z, x, t) = \frac{N(x, z)}{R(z)} \exp(zt), \quad K'(z, x, t) = \frac{N(x, z)}{R'(z)} \exp(zt), \quad (20)$$

$$K(0, x, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{N(x, z)}{R(z)}, \quad \theta^\pm(z) = \frac{\varepsilon t_\kappa}{z(z \pm \varepsilon t_\kappa)},$$

$$\Omega(x, t) = t_a \sum_{n=1}^{[at/2h]} q^n \frac{\dot{\Delta}(\omega_n^-(x, t)) + q \dot{\Delta}(\omega_n^+(x, t))}{\Delta_0}, \quad \omega_n^\pm(x, t) = a^{-1} [at - (2n-1)h \pm x]. \quad (21)$$

В формуле (19) $J_1(x, t)$ обозначает интеграл вдоль берегов разреза, проведенного в комплексной плоскости z от точки $z = 0$ до $z = -\infty$ вдоль отрицательной части действительной оси:

$$J_1(x, t) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty \theta^+(\xi) H(x, \xi) d\xi, \quad H(x, \xi) = \frac{N(x, -i\xi, -\xi)}{R(-i\sqrt{\xi}, -\xi)} - \frac{N(x, i\sqrt{\xi}, -\xi)}{R(i\sqrt{\xi}, -\xi)}, \quad (22)$$

$$J_2(x, t) = J_1(x, t) - 2J_1(x, t, t_{\text{вк}}),$$

где

$$N(x, z) = N(x, \sqrt{z}, z), \quad R(z) = R(\sqrt{z}, z).$$

Чтобы получить формулы для вычисления температуры, смещений, напряжений, в (20) вместо функции $N(x, z)$ подставляется одна из $N_T, N_u, N_\sigma(x, z)$ соответственно, причем N_σ определяется по формуле

$$N_\sigma(x, z) = \gamma z \left[N_\sigma^0(x, z) \left(\text{sh } \gamma z + \frac{\mu_*}{a_*} \text{ch } \gamma z \right) - R(z) \left(\text{ch } (\gamma z x h^{-1}) + \frac{\mu_*}{a_*} \text{sh } (\gamma z x h^{-1}) \right) \right], \quad (23)$$

а функции N_T, N_u, N_σ^0, R имеют следующий вид:

– для задачи А

$$N_T(x, z) = \sqrt{z} (1 - \gamma^2 z) (\text{ch } \gamma z + \mu_* a_*^{-1} \text{sh } \gamma z) \text{sh } (\sqrt{z} x h^{-1}), \quad (24)$$

$$N_u(x, z) = (1 - \gamma^2 z) \text{ch } \sqrt{z} \text{sh } (\gamma z x h^{-1}) - \gamma \hat{V} (\text{ch } \gamma z \text{ch } (\sqrt{z} x h^{-1}) - \gamma \sqrt{z} \text{sh } \sqrt{z} \times \\ \times \text{sh } (\gamma z x h^{-1}) - \text{ch } (\gamma z (h - x) h^{-1})) + \mu_* a_*^{-1} ((1 - \gamma^2 z) \text{ch } \sqrt{z} \text{ch } (\gamma z x h^{-1}) - \\ - \gamma \hat{V} (\text{sh } \gamma z \text{sh } (\sqrt{z} x h^{-1}) - \gamma \sqrt{z} \text{sh } \sqrt{z} \text{ch } (\gamma z x h^{-1}))), \quad (25)$$

$$N_\sigma^0(x, z) = (1 - \gamma^2 z) \text{ch } \sqrt{z} \text{ch } (\gamma z x h^{-1}) - \gamma \hat{V} (\gamma \sqrt{z} \text{ch } \gamma z \text{sh } (\sqrt{z} x h^{-1}) - \gamma \sqrt{z} \text{sh } \sqrt{z} \times \\ \times \text{ch } (\gamma z x h^{-1}) + \text{sh } (\gamma z (h - x) h^{-1})) + \mu_* a_*^{-1} ((1 - \gamma^2 z) \text{ch } \sqrt{z} \text{sh } (\gamma z x h^{-1}) - \\ - \gamma^2 \hat{V} (\sqrt{z} \text{sh } \gamma z \text{sh } (\sqrt{z} x h^{-1}) - \sqrt{z} \text{sh } \sqrt{z} \text{sh } (\gamma z x h^{-1}))), \quad (26)$$

$$R(z) = (1 - \gamma^2 z) \text{ch } \sqrt{z} \text{sh } \gamma z - \gamma \hat{V} (\text{ch } \sqrt{z} \text{ch } \gamma z - \gamma \sqrt{z} \text{sh } \sqrt{z} \text{sh } \gamma z - 1) + \\ + \mu_* a_*^{-1} ((1 - \gamma^2 z) \text{ch } \sqrt{z} \text{ch } \gamma z - \gamma \hat{V} (\text{ch } \sqrt{z} \text{sh } \gamma z - \gamma \sqrt{z} \text{sh } \sqrt{z} \text{ch } \gamma z)); \quad (27)$$

– для задачи Б

$$N_T(x, z) = \sqrt{z} (1 - \gamma^2 z) (\text{ch } \gamma z + \mu_* a_*^{-1} \text{sh } \gamma z) \text{ch } (\sqrt{z} x h^{-1}), \quad (28)$$

$$N_u(x, z) = (1 - \gamma^2 z) \text{sh } \sqrt{z} \text{ch } (\gamma z x h^{-1}) - \gamma \hat{V} (\text{ch } \gamma z \text{sh } (\sqrt{z} x h^{-1}) - \\ - \gamma \sqrt{z} \text{ch } \sqrt{z} \text{sh } (\gamma z x h^{-1})) + \mu_* a_*^{-1} [(1 - \gamma^2 z) \text{sh } \sqrt{z} \text{ch } (\gamma z x h^{-1}) - \\ - \gamma \hat{V} (\text{sh } \gamma z \text{sh } (\sqrt{z} x h^{-1}) - \gamma \sqrt{z} \text{ch } \sqrt{z} \text{ch } (\gamma z x h^{-1})) + \gamma \sqrt{z} \text{ch } (\gamma z (h - x) h^{-1})], \quad (29)$$

$$N_\sigma^0(x, z) = (1 - \gamma^2 z) \text{sh } \sqrt{z} \text{ch } (\gamma z x h^{-1}) - \gamma \hat{V} (\gamma \sqrt{z} \text{ch } \gamma z \text{ch } (\sqrt{z} x h^{-1}) - \gamma \sqrt{z} \text{ch } \sqrt{z} \times \\ \times \text{ch } (\gamma z x h^{-1})) + \mu_* a_*^{-1} [(1 - \gamma^2 z) \text{sh } \sqrt{z} \text{sh } (\gamma z x h^{-1}) - \\ - \gamma^2 \hat{V} \sqrt{z} (\text{sh } \gamma z \text{ch } (\sqrt{z} x h^{-1}) - \text{ch } \sqrt{z} \text{sh } (\gamma z x h^{-1}) - \text{sh } (\gamma z (h - x) h^{-1}))], \quad (30)$$

$$R(z) = (1 - \gamma^2 z) \text{sh } \sqrt{z} \text{sh } \gamma z - \gamma \hat{V} (\text{sh } \sqrt{z} \text{ch } \gamma z - \gamma \sqrt{z} \text{ch } \sqrt{z} \text{sh } \gamma z) + \\ + \mu_* a_*^{-1} [(1 - \gamma^2 z) \text{sh } \sqrt{z} \text{ch } \gamma z - \gamma \hat{V} (\text{sh } \sqrt{z} \text{sh } \gamma z - \gamma \sqrt{z} \text{ch } \sqrt{z} \text{ch } \gamma z + \gamma \sqrt{z})], \quad (31)$$

где $\gamma, \hat{V}, \mu_*, a_*$ безразмерные параметры задач А, Б, определяющиеся по формулам

$$\gamma = \frac{\kappa}{ah}, \quad \hat{V} = \frac{fV\alpha}{K} \frac{2\mu(1+\nu)h}{1-2\nu}, \quad \mu_* = \frac{2\mu(1-\nu)/(1-2\nu)}{2\mu_1(1-\nu_1)/(1-2\nu_1)}, \quad a_* = \frac{a}{a_1}. \quad (32)$$

В статье [23] рассматривалась динамическая задача термоупругости о скольжении с постоянной скоростью жесткой полуплоскости по поверхности теплопроводного упругого покрытия, нижняя грань которого сцеплена с подложкой (основанием) в виде теплопроводной упругой полуплоскости II из другого материала, в которой на границе между покрытием и подложкой были заданы условия идеального теплового контакта. Отметим, что полученные формулы решения задачи А (24)–(27) могут быть получены из формул решения задачи из [23] предельным переходом при $K_*/\sqrt{\kappa_*} \rightarrow \infty$, а формулы решения задачи Б (28)–(31) – при $K_*/\sqrt{\kappa_*} \rightarrow 0$, где K_* , κ_* отношения коэффициентов теплопроводности и температуропроводности материалов покрытия и подложки соответственно.

Сравнение областей устойчивых и неустойчивых решений рассмотренных задач

С помощью полученных формул проводились исследования границы области неустойчивых решений в пространстве безразмерных параметров задачи (32) в зависимости от параметров задачи μ_* и \hat{V} при фиксированных остальных параметрах. На рис. 2 в плоскости \hat{V}, μ_* представлены графики границы между областями устойчивых и неустойчивых решений задачи из [23] (сплошная линия), задачи А (штриховая), задачи Б (штрихпунктирная). Значение γ фиксировалось и полагалось равным 10^{-1} , в то время как a_* определялось по формуле $a_* = \sqrt{\mu_*}$. Как видно из рис. 2, существует диапазон значений μ_* , при которых решения задачи из [23] и задачи Б устойчивы при любом значении \hat{V} , в то время как для решения задачи А область неустойчивых решений существует для любого значения μ_* .

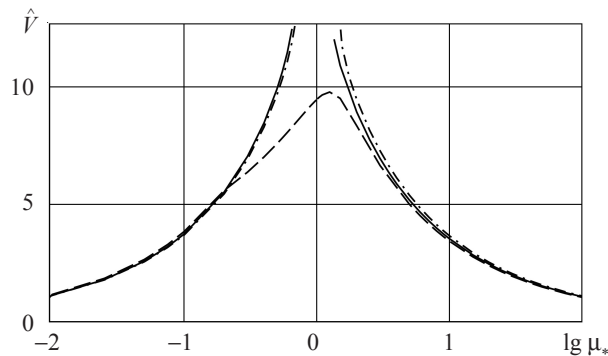


Рис. 2

Заметим, что области устойчивости решений задач А, Б определяются нулями функций (27) и (31) и поэтому зависят только от $\gamma, \hat{V}, \mu_*, a_*$. Это означает, что в условиях задач А и Б на устойчивость или неустойчивость решений влияют лишь упругие свойства подложки и не влияют температурные. Сравнивая области устойчивости решений задачи из [23] и задач А, Б, изображенные на рис. 2, можно обнаружить, что при определенных значениях μ_* области устойчивости решений совпадают и зависят только от упругих свойств подложки.

Закключение

Сравнение областей устойчивых и неустойчивых решений задач о скольжении жесткого тела по поверхности покрытия на упругой подложке показало, что параметрические границы между этими областями совпадают при рассмотренных условиях теплового контакта между покрытием и полуплоскостью, если покрытие существенно жестче или мягче подложки, что примерно соответствует значениям $\lg \mu_* > 0,5$ и $\lg \mu_* < -0,5$. Кроме того, эти границы совпадают с границами, полученными в [23] для случая идеального теплового контакта между покрытием и подложкой. Это говорит о том, что относительная жесткость покрытия и подложки является главным определяющим фактором устойчивости скользящего фрикционного контакта.

Список литературы

1. Dow T.A., Burton R.A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear. *Wear*. 1972. Vol. 19. No 3. P. 315–328.
2. Mortazavi V., Wang C., Nosonovsky M. Stability of frictional sliding with the coefficient of friction depended on the temperature. *J. Tribology*. 2012. Vol. 134. No 4. P. 041601-1–041601-7. DOI:10.1115/1.4006577.
3. Yi Y.B., Bendawi A. Effect of convective cooling on frictionally excited thermoelastic instability. *Wear*. 2012. Vol. 296. P. 583–589.
4. Lee H., Jang Y.H. Effect of the volume of a functionally graded material layer on frictionally excited thermoelastic instability. *Tribol. Int.* 2012. Vol. 49. P. 103–109.
5. Ostermeyer G.-P., Graf M. Influence of wear on thermoelastic instabilities in automotive brakes. *Wear*. 2013. Vol. 308. No 1–2. P. 113–120.
6. Park J.H., Park T.W., Lee J. H., Cho M.H. Hot judder simulation of a ventilated disc and design of an improved disc using sensitivity analysis. *Int. J. Automot. Technol.* 2014. Vol. 15. No 1. P. 1–6.
7. MA Biao, ZHAO Jia-xin, LI He-yan, NING Ke-yan, HE Chun-ping. Effect of clutches' structural parameters on thermalelastic instability. *Journal of Jilin Univ. Engineering and Technol.* 2014. Vol. 44. No 4. P. 933–938.
8. Abbasi S., Teimourimanesh S., Vernersson T., Lunden R. Temperature and thermoelastic instability at tread braking using cast iron friction material. *Wear*. 2014. Vol. 314. No 1–2. P. 171–180.
9. Yi Y.-B., Bendawi A., Li H., Zhao J. Finite element analysis of thermoelastic instability in intermittent sliding contact. *J. Therm. Stress*. 2014. Vol. 37. No 7. P. 870–883.
10. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic contact instability of a functionally graded layer and a homogeneous half-plane. *Int. J. Solids Struct.* 2014. Vol. 51. No 23–24. P. 3962–3972.
11. Liu J., Wang Y.-S., Ke L.-L., Yang J., Alam F. Dynamic instability of an elastic solid sliding against a functionally graded material coated half-plane. *Int. J. Mech. Sci.* 2014. Vol. 89. P. 323–331.
12. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic instability of a functionally graded layer interacting with a homogeneous layer. *Int. J. Mech. Sci.* 2015. Vol. 99. P. 218–227.
13. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic instability of functionally graded materials in frictionless contact. *Acta Mech.* 2015. Vol. 226. No 7. P. 2295–2311.
14. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S., Liu J. Frictionally excited thermoelastic instability of functionally graded materials sliding out-of-plane with contact resistance. *J. Appl. Mech. Trans. ASME*. 2016. Vol. 83. No 2. DOI: 10.1115/1.4031974.
15. Shpenev A.G., Kenigfest A.M., Golubkov A.K. Theoretical and experimental study of carbon brake discs frictionally induced thermoelastic instability. *Springer Proc. Phys.* 2016. Vol. 175. P. 551–559.
16. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability. *Proc. R. Soc. A*. 2006. Vol. 462. No 2071. P. 2161–2176.

17. Afferrante L., Ciavarella M. Thermo-elastic dynamic instability (TEDI) – a review of recent results. *J. Eng. Math.* 2007. V. 61. No 2–4. P. 285–300.
18. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Васильев А.С., Волков С.С. Термоупругодинамическая неустойчивость решения контактной задачи для покрытия с учетом тепловыделения от трения. *Вестник Донского государственного технического университета.* 2014. Т. 14. № 4. С. 17–29.
19. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Aizikovich S.M., Ke L.L. Instability of solution of the dynamic sliding frictional contact problem of coupled thermoelasticity. *Mater. Phys. Mech.* 2015. Vol. 23. P. 14–19.
20. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Айзикович С.М. Динамическая и квазистатическая неустойчивость скользящего термофрикционного контакта. *Трение и износ.* 2016. Т. 37. № 3. С. 280–289.
21. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Айзикович С.М., Селезнев Н.М. О корректности квазистатических решений проблемы неустойчивости скользящего термофрикционного контакта. *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сб. докл.* Казань: Изд-во КФУ, 2015. С. 1491–1493.
22. Митрин Б.И., Зеленцов В.Б., Айзикович С.М. Параметрические границы неустойчивости решений задач о термофрикционном скользящем контакте при фрикционном разогреве в зоне контакта. *Юбилейная научная конференция студентов и молодых ученых, посвященная 85-летию ДГТУ: сб. докл.* Ростов-на-Дону: Изд. центр ДГТУ, 2015. С. 5008–5014.
23. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Айзикович С.М. Неустойчивость скользящего контакта с покрытием на упругой подложке при наличии трения и разогрева от трения. *Вестник Донского государственного технического университета.* 2016. Т. 16. № 4. С. 5–16.
24. Митрин Б.И., Зеленцов В.Б., Игумнов Л.А. Термоупругодинамическая неустойчивость скольжения жесткого тела по покрытию на упругой подложке. *Проблемы прочности и пластичности.* 2016. Т. 78. №1. С. 30–44.

References

1. Dow T.A., Burton R.A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear. *Wear.* 1972. Vol. 19. No 3. P. 315–328.
2. Mortazavi V., Wang C., Nosonovsky M. Stability of frictional sliding with the coefficient of friction depended on the temperature. *J. Tribology.* 2012. Vol. 134. No 4. P. 041601-1–041601-7. DOI:10.1115/1.4006577.
3. Yi Y.B., Bendawi A. Effect of convective cooling on frictionally excited thermoelastic instability. *Wear.* 2012. Vol. 296. P. 583–589.
4. Lee H., Jang Y.H. Effect of the volume of a functionally graded material layer on frictionally excited thermoelastic instability. *Tribol. Int.* 2012. Vol. 49. P. 103–109.
5. Ostermeyer G.-P., Graf M. Influence of wear on thermoelastic instabilities in automotive brakes. *Wear.* 2013. Vol. 308. No 1–2. P. 113–120.
6. Park J.H., Park T.W., Lee J. H., Cho M.H. Hot judder simulation of a ventilated disc and design of an improved disc using sensitivity analysis. *Int. J. Automot. Technol.* 2014. Vol. 15. No 1. P. 1–6.
7. MA Biao, ZHAO Jia-xin, LI He-yan, NING Ke-yan, HE Chun-ping. Effect of clutches' structural parameters on thermalelastic instability. *Journal of Jilin Univ. Engineering and Technol.* 2014. Vol. 44. No 4. P. 933–938.
8. Abbasi S., Teimourimanesh S., Vernersson T., Lunden R. Temperature and thermoelastic instability at tread braking using cast iron friction material. *Wear.* 2014. Vol. 314. No 1–2. P. 171–180.
9. Yi Y.-B., Bendawi A., Li H., Zhao J. Finite element analysis of thermoelastic instability in intermittent sliding contact. *J. Therm. Stress.* 2014. Vol. 37. No 7. P. 870–883.
10. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic contact instability of a functionally graded layer and a homogeneous half-plane. *Int. J. Solids Struct.* 2014. Vol. 51. No 23–24. P. 3962–3972.
11. Liu J., Wang Y.-S., Ke L.-L., Yang J., Alam F. Dynamic instability of an elastic solid sliding against a functionally graded material coated half-plane. *Int. J. Mech. Sci.* 2014. Vol. 89. P. 323–331.

12. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic instability of a functionally graded layer interacting with a homogeneous layer. *Int. J. Mech. Sci.* 2015. Vol. 99. P. 218–227.
13. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic instability of functionally graded materials in frictionless contact. *Acta Mech.* 2015. Vol. 226. No 7. P. 2295–2311.
14. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S., Liu J. Frictionally excited thermoelastic instability of functionally graded materials sliding out-of-plane with contact resistance. *J. Appl. Mech. Trans. ASME.* 2016. Vol. 83. No 2. DOI: 10.1115/1.4031974.
15. Shpenev A.G., Kenigfest A.M., Golubkov A.K. Theoretical and experimental study of carbon brake discs frictionally induced thermoelastic instability. *Springer Proc. Phys.* 2016. Vol. 175. P. 551–559.
16. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability. *Proc. R. Soc. A.* 2006. Vol. 462. No 2071. P. 2161–2176.
17. Afferrante L., Ciavarella M. Thermo-elastic dynamic instability (TEDI) – a review of recent results. *J. Eng. Math.* 2007. V. 61. No 2–4. P. 285–300.
18. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., S.M. Vasiliev A.S., Volkov S.S. Termouprugodinamicheskaya neustoychivost' resheniya kontaktnoy zadachi dlya pokrytiya s uchedom teplovydeleniya ot treniya [Thermoelastodynamic instability of solution of the contact problem for the coating based on heat from friction]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Vestnik of Don State Technical University]*. 2014. V.14. No 4. P. 17–29 (In Russian).
19. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Aizikovich S.M., Ke L.L. Instability of solution of the dynamic sliding frictional contact problem of coupled thermoelasticity. *Mater. Phys. Mech.* 2015. Vol. 23. P. 14–19.
20. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Aizikovich S.M. Dinamicheskaya i kvazistaticheskaya neustoychivost' skol'zyashchego termofriktsionnogo kontakta [Dynamic and quasi-static instability of sliding thermoelastic frictional contact]. *Trenie i iznos [Journal Friction and Wear]*. 2016. Vol. 37. No 3. P. 280–289 (In Russian).
21. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Aizikovich, S.M., Seleznev N.M. O korrektnosti kvazistaticheskikh resheniy problemy neustoychivosti skol'zyashchego termofriktsionnogo kontakta [On the correctness of the quasi-static solutions in problems of instability of termofrictional sliding contact]. *XI Vserossiyskiy s'ezd po fundamental'nyim problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki: sb. dokl. [XIth all-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics: The collection of reports]*. Kazan. KFY Publ. 2015. P. 1491–1493 (In Russian).
22. Mitrin B.I., Zelentsov V.B., Aizikovich, S.M. Parametricheskie granitsy neustoychivosti resheniy zadach o termofriktsionnom skol'zyashchem kontakte pri friktsionnom razogreve v zone kontakta [Parametric border of instability of the solutions of thermofrictional sliding contact with the frictional heating in the contact zone]. *Yubileynaya nauchnaya konferentsiya studentov i molodykh uchenykh, posvyashchennaya 85-letiyu DGTU: sb. dokl. [Jubilee scientific conference of students and young scientists, devoted to 85th anniversary DGTU: The collection of reports]*. Rostov-on-Don: DGTU Publ. 2015. P. 5008–5014 (In Russian).
23. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Aizikovich, S.M. Neustoychivost skol'zyashchego kontakta s pokrytiem na uprugoy podlozhke pri nalichii treniya i razogreva ot treniya [Instability of sliding contact with an elastic coating on the substrate in the presence of friction and frictional heating]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Vestnik of Don State Technical University]*. 2016. Vol. 16. No 4. P. 5–16 (In Russian).
24. Mitrin B.I., Zelentsov V.B., Igumnov L.A. Termouprugodinamicheskaya neustoychivost' skol'zheniya zhestkogo tela po pokrytiyu na uprugoy podlozhke [Thermoelastodynamic instability of sliding of a rigid body over a coating on an elastic base]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. Vol. 78. No 1. P. 30–44 (In Russian).

**THE EFFECT OF THE CONDITIONS OF A THERMAL CONTACT BETWEEN
A COATING AND AN ELASTIC SUBSTRATE ON THE THERMAL
ELASTODYNAMIC INSTABILITY OF A SLIDING FRICTIONAL CONTACT**

Mitrin B.I.^{1,2}, Zelentsov V.B.¹, Igumnov L.A.²

¹*Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

²*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

Constant velocity sliding of a rigid body along the surface of a thermal-elastic coating on an elastic substrate of another material in the presence of friction and frictional heat emission along the contact is considered. The condition of either thermal isolation or unbounded thermal flux is assigned along the coating/substrate interface. The solution of the corresponding problems of thermal elasticity is obtained in contour quadratures of the inverse Laplace transform. Based on the analysis of the poles of the quadrature integrands of the solution of the problem, regions of stable and unstable solutions of the problem are determined, as well as the boundary between them, which depends on the problem parameters. The regions of stable and unstable solutions are compared for the conditions of the thermal contact analyzed in this paper, as well as for the case of an ideal thermal contact.

Keywords: thermal-elastic instability, sliding, friction, dynamics, coating, elastic substrate, thermal contact conditions.