

УДК 539.37

УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА, НАГРУЖЕННОГО ДАВЛЕНИЕМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

М.С. Ганеева¹, М.А. Ильгамов², В.Е. Моисеева¹

¹ИММ КНЦ РАН, Казань, ²ИМ УНЦ РАН, Уфа

Исследуется устойчивость и нелинейный изгиб тонкого упругопластического сферического сегмента под действием давления сжимаемой жидкости. Разработаны соотношения задачи, алгоритм и программа расчетов. Приведены результаты численного решения для оболочки с жестко заделанными краями в зависимости от условий постановки эксперимента.

Ключевые слова: сферический сегмент, устойчивость, сжимаемая жидкость, алгоритм и программа расчетов.

Устойчивость и послекритическое поведение тонкостенной оболочки значительно зависит от вида нагружения [1, 2]. По-видимому, впервые четкое разграничение между случаями задания мертвой нагрузки на оболочку и задания перемещения с помощью испытательной машины было указано в [3]. В реальных условиях эксперимента эти два крайних случая в чистом виде не реализуются. Бóльшее приближение к действительности наблюдается при взаимодействии оболочки и нагружающей среды. Некоторые рассмотренные примеры такого взаимодействия приведены в [4].

Постановка задачи

Рассматривается тонкий сферический сегмент под действием давления сжимаемой жидкости с выпуклой стороны оболочки и исследуется его нелинейный осесимметричный изгиб и устойчивость. Невесомая сжимаемая жидкость находится в герметически закрытой емкости с жесткими стенками (рис. 1). Давление в емкости создается медленной подачей жидкости.

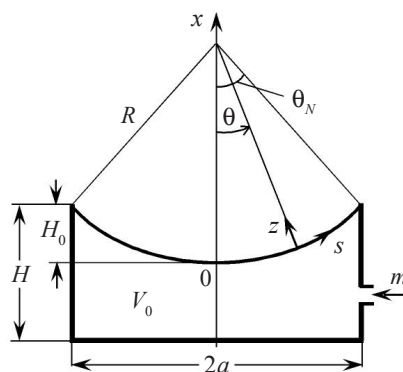


Рис. 1

Характеристики сферического сегмента: R – радиус сферы, h – толщина стенки, H_0 – глубина полюса по отношению к основанию, a – радиус основания. Вводятся координатные линии: меридианы s , внешняя нормаль z к срединной поверхности; $0 \leq s \leq s_N$, $-h/2 \leq z \leq h/2$; $r = R \sin \theta$ – радиус параллели, $0 \leq \theta \leq \theta_N$ – угол между осью вращения x и нормалью z .

Обозначим M_0, V_0, p_0 – масса, объем и давление жидкости при ненапряженном состоянии сегмента; m, v, p – масса дополнительно поданной в емкость жидкости, соответствующее изменение объема емкости и установившееся в ней давление. Объем сегмента вычислим по формуле (см. рис. 1)

$$V_0 = \pi R^3 \left(\frac{H}{R} \sin^2 \theta_N - \frac{2}{3} + \cos \theta_N - \frac{1}{3} \cos^3 \theta_N \right).$$

Пусть давление p в емкости в процессе всего нагружения изменяется по адиабатическому закону [4]:

$$p = p_0 \left(\frac{1 + m/M_0}{1 + v/V_0} \right)^\gamma, \quad (1)$$

где γ – коэффициент адиабаты. Таким образом, в данной задаче параметром нагружения будет служить масса подаваемой в емкость жидкости m . В случае малых деформаций сегмента можно принять:

$$v = 2\pi \int_0^{s_N} w r ds, \quad (2)$$

где $w(s)$ – функция прогиба оболочки.

Ниже приводятся соотношения, описывающие осесимметричное, моментное, геометрически и физически нелинейное напряженно-деформированное состояние сферической оболочки при умеренных поворотах [5]. Компоненты перемещения u_1, u_3 и выражения поворотов элемента ϑ_1, ϑ_2 имеют вид:

$$u_1 = u + z\vartheta_1, \quad u_3 = w, \quad \vartheta_1 = -\frac{dw}{ds} + \frac{u}{R}, \quad \vartheta_2 = 0. \quad (3)$$

Деформации на уровне z равны:

$$\varepsilon_{11} = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} + z \frac{d\vartheta_1}{ds} + \frac{1}{2} \vartheta_1^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R} (u \operatorname{ctg} \theta + w + z\vartheta_1 \operatorname{ctg} \theta). \quad (4)$$

Уравнения равновесия в недеформированных осях s, z имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{drT_{11}^*}{ds} - T_{22}^* \cos \theta + Q_1^* \sin \theta &= 0, \\ \frac{drQ_1^*}{ds} - (T_{11}^* + T_{22}^*) \sin \theta + rP &= 0, \\ \frac{drM_{11}}{ds} - M_{22} \cos \theta &= r(Q_1^* + T_{11}^* \vartheta_1), \end{aligned} \quad (5)$$

где $T_{11}^* \approx T_{11} + Q_1 \vartheta_1$, $T_{22}^* \approx T_{22}$, $Q_1^* \approx Q_1 - T_{11} \vartheta_1$; T_{11}, T_{22}, Q_1 – меридиональные, кольцевые и перерезывающие усилия, M_{11}, M_{22} – изгибающие моменты; $P = p - p_0$ –

равномерно распределенное давление на оболочку, где p определяется из (1), (2).

Напряжения через деформации выражаются по теории малых упругопластических деформаций [6] для сжимаемого материала с диаграммой линейного упрочнения с коэффициентом упрочнения λ , модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , пределом текучести σ_s . У основания оболочки $s = s_N$ принимаются условия жесткого закрепления:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \vartheta_1 = 0. \quad (6)$$

Метод решения

Вводится вектор разрешающих функций:

$$\mathbf{Y} = (T_{11}^*, Q_1^*, M_{11}, P, u, w, \vartheta_1, B)'. \quad (7)$$

В выражении (7), кроме общепринятых неизвестных, введена функция, характеризующая изменение объема из-за прогиба оболочки:

$$B(s) = 2\pi \int_0^s wr ds, \quad B(0) = 0, \quad B(s_N) = v. \quad (8)$$

Присоединение к соотношениям задачи (3)–(5) уравнений для неизвестных P и B :

$$\frac{dP}{ds} = 0, \quad \frac{dB}{ds} = 2\pi wr, \quad 0 \leq s \leq s_N,$$

дает разрешающую систему уравнений нелинейного осесимметричного изгиба:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{ds} = \mathbf{A}(s)\mathbf{Y} + \mathbf{F}(s, \mathbf{Y}), \quad 0 \leq s \leq s_N. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{A}(s)$ – матрица коэффициентов размерности 8×8 , $\mathbf{F}(s, \mathbf{Y})$ – вектор геометрически и физически нелинейных членов 8×1 .

Для полного формирования краевой задачи нужно определить граничные условия в полюсе оболочки $s = 0$ и у основания $s = s_N$. При $s = 0$ используются предельные уравнения в полюсе [5] и граничные условия:

$$Q_1^* = 0, \quad u = 0, \quad \vartheta_1 = 0, \quad B = 0. \quad (10)$$

У основания оболочки $s = s_N$ к условиям (6) добавляется зависимость между неизвестными P и v , приближенно следующая из (1) с учетом (8):

$$\begin{aligned} P + p_0 \left(1 + \frac{m}{M_0}\right)^\gamma \gamma \frac{v}{V_0} = \\ = -p_0 + p_0 \left(1 + \frac{m}{M_0}\right)^\gamma \left[1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \left(\frac{v}{V_0}\right)^2 - \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{6} \left(\frac{v}{V_0}\right)^3\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

При численном решении вместо (11) могут быть реализованы крайние случаи нагружения, когда происходит рост параметра нагрузки:

$$P_{k+1} = P_k + \Delta P, \quad k = \overline{1, K}, \quad (12)$$

или задано изменение объема оболочки в процессе деформации

$$v_{i+1} = v_i + \Delta v, \quad i = \overline{1, J}. \quad (13)$$

Алгоритм численного решения нелинейной краевой задачи (9)–(11) складывается из следующих основных этапов:

- а) пошаговый процесс по ведущему параметру m_l/M_0 , $l = \overline{1, L}$;
- б) на шаге m_l/M_0 использование метода линеаризации [5]:

$$\frac{d\mathbf{Y}_l^{(q+1)}}{ds} = \left[\mathbf{A}(s) + \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{Y}_l^{(q)})}{d\mathbf{Y}} \right] \mathbf{Y}_l^{(q+1)} + \mathbf{F}(s, \mathbf{Y}_l^{(q)}) - \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{Y}_l^{(q)})}{d\mathbf{Y}} \mathbf{Y}_l^{(q)}, \quad q \geq 0, \quad (14)$$

$\mathbf{Y}_l^{(0)} = \mathbf{Y}_{l-1}$, $d\mathbf{F}/d\mathbf{Y}$ – матрица Якоби вектор-функции $\mathbf{F}(s, \mathbf{Y})$;

в) применение метода ортогональной прогонки [7] к линеаризованным уравнениям (14) на N отрезках меридиана;

г) численное интегрирование по нормальной координате z по $(M+1)$ -му слою по толщине оболочки.

Пример и анализ результатов

Результаты вычислений приведены для пологого сферического сегмента: $R/h = 500$, $a/h = 63,246$, $H_0/h = 4,016$; $\theta_N = 0,1268$, $H/H_0 = 2; 10$. На рис. 2–4 и в таблице представлены безразмерные параметры нагрузки P/E , максимальных значений прогиба w/h и интенсивности напряжений $\sigma_i/E = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}/E$. Заданы характеристики: $E = 19,62 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,3$, $\lambda = 0,9$, $\sigma_s = 294,3$ МПа, $\gamma = 1,4$ (воздух), $\gamma = 7$ (масло). При расчетах принято: $p_0 = 0,0981$ МПа, $N = 800$, $M = 8$. Используются следующие сокращения: Γ – геометрически нелинейное решение, $\Gamma\Phi$ – геометрически и физически нелинейное решение, НДС – напряженно-деформированное состояние.

На рис. 2 сплошными линиями изображены Γ - и $\Gamma\Phi$ -зависимости $P(w)$ при нагружении (13), то есть без учета влияния сжимаемости жидкости на давление на оболочку. Штриховые линии 1–4 соответствуют скачкообразной потере устойчивости оболочки после достижения верхней предельной нагрузки (точка Q) при учете сжимаемости жидкости (11). При получении решения 1 принято $H/H_0 = 2$, $\gamma = 7$, для решения 2 – $H/H_0 = 2$, $\gamma = 1,4$, для решения 3 – $H/H_0 = 10$, $\gamma = 7$, для решения 4 – $H/H_0 = 10$, $\gamma = 1,4$.

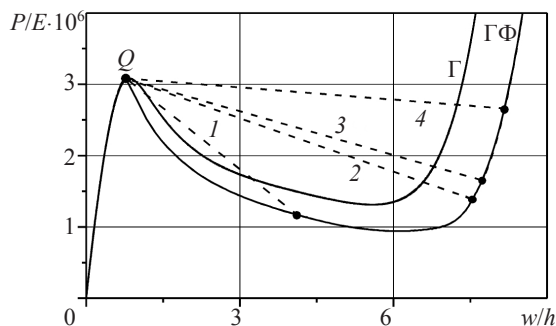
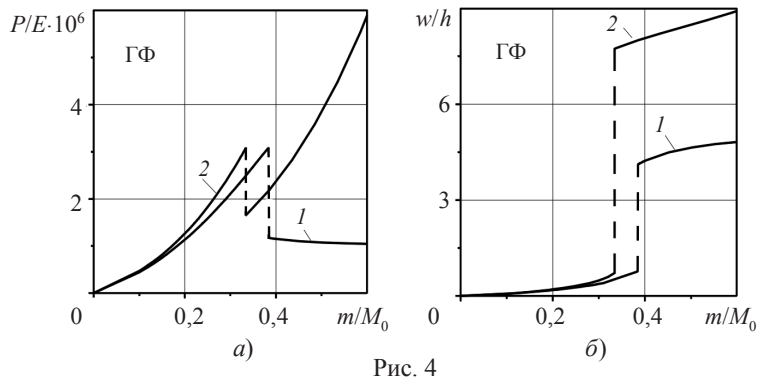
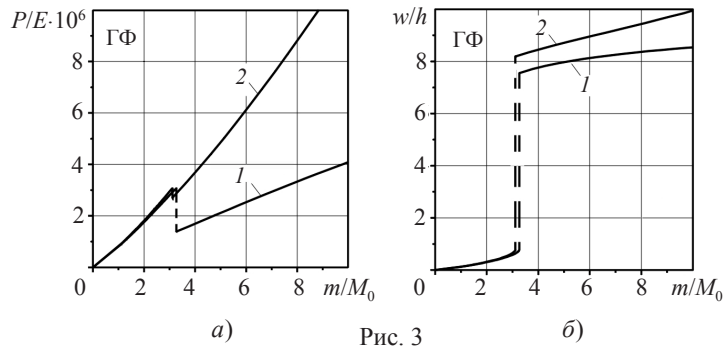


Рис. 2

На рис. 3, а, б соответственно показаны величины параметров давления P/E и прогиба w/h в зависимости от массы подаваемой жидкости m/M_0 для случая, когда

нагружающей средой является воздух ($\gamma = 1,4$). На рис. 4 изображены такие же зависимости, когда в емкость нагнетается масло ($\gamma = 7$). На рис. 3 и 4 кривые 1 соответствуют случаю $H/H_0 = 2$, кривые 2 – $H/H_0 = 10$. Из рис. 4,а видно: когда нагнетается масло в емкость малого объема $H/H_0 = 2$, за точкой скачка давления по мере подачи жидкости не происходит увеличения перепада давления, что, вероятно, объясняется потерей точности в расчетах нелинейной задачи и, соответственно, усложнением условий реального эксперимента.



В таблице представлены ГФ-данные о НДС для некоторых характерных этапов деформирования оболочки при росте параметра подачи жидкости в емкость m/M_0 .

Таблица

Этапы деформирования	Характеристики НДС	$H/H_0 = 2$		$H/H_0 = 10$	
		$\gamma = 1,4$	$\gamma = 7$	$\gamma = 1,4$	$\gamma = 7$
$\max \sigma_{sz} = \sigma_s$	$m/M_0 \cdot 10$	32,45	3,823	31,00	3,330
	$P/E \cdot 10^6$	3,063	3,063	3,070	3,063
	$w/h, \theta = 0$	0,733	0,734	0,742	0,733
Верхняя предельная нагрузка	$m/M_0 \cdot 10$	32,64	3,840	31,10	3,342
	$P/E \cdot 10^6$	3,082	3,080	3,082	3,082
	$w/h, \theta = 0$	0,771	0,765	0,769	0,772
	$\sigma_i^{(-)}/E \cdot 10^3, \theta = 0$	1,519	1,516	1,518	1,520
Окрестность скачка	$m/M_0 \cdot 10$	32,65	3,850	31,11	3,343
	$P/E \cdot 10^6$	1,389	1,172	2,703	1,651
	$w/h, \theta = 0$	7,554	4,117	8,186	7,740
	$\sigma_i^{(-)}/E \cdot 10^3, \theta = 0$	2,839	2,091	4,193	3,213

Видно, что НДС оболочки при достижении предела текучести материала $\max_{s,z} \sigma_i = \sigma_s$ и верхней предельной нагрузки практически не зависит от характеристик нагружающей среды γ и величины объема емкости H/H_0 . Однако после достижения верхней предельной нагрузки малейшее увеличение подачи жидкости приводит к скачкообразному деформированию оболочки с существенным снижением давления и увеличением прогиба и напряжений.

Литература

1. *Вольмир, А.С.* Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука. Физматлит, 1967. – 984 с.
2. *Ворович, И.И.* Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек / И.И. Ворович, Н.И. Минакова // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. – М.: ВИНТИ, 1973. – Т. 7. – С. 5–86.
3. *Цянь Сюе-сень.* Рецензия на монографию Х.М. Муштари и К.З. Галимова «Нелинейная теория упругих оболочек» / Цянь Сюе-сень, Ху Хай-чан // Известия Казанского филиала АН СССР. Серия физико-математич. и технич. наук. – 1958. – №12. – С. 179–180.
4. *Ильгамов, М.А.* Статические задачи гидроупругости / М.А. Ильгамов. – Казань: ИММ КазНЦ РАН, 1994. – 208 с.
5. *Ганеева, М.С.* Прочность и устойчивость оболочек вращения / М.С. Ганеева. – М.: Наука, 1992. – 161 с.
6. *Ильюшин, А.А.* Пластичность. Ч. I. Уругопластические деформации / А.А. Ильюшин. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1948. – 376 с.
7. *Годунов, С.К.* О численном решении краевых задач для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – 1961. – Т. 16, №3. – С. 171–174.

[10.03.2009]

STABILITY OF A SPHERICAL SEGMENT LOADED BY THE PRESSURE OF A COMPRESSIBLE LIQUID

M.S. Ganeeva, M.A. Il'gamov, M.E. Moiseeva

The nonlinear bending and stability of a thin elasto-plastic spherical segment under the pressure of a compressible liquid is studied. Relations of the problem, an algorithm and a computational program are developed. Results of numerically analyzing a shell with rigidly clamped edges as a function of the conditions of the experiment configuration are obtained.

Key words: spherical segment, stability, compressible liquid, algorithm and computational program.