

УДК 539.3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ШТАМПА ПРИ НАЛИЧИИ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ<sup>\*)</sup>

Н.В. Баничук<sup>1</sup>, С.Ю. Иванова<sup>1</sup>, Е.В. Макеев<sup>1</sup>, Ф. Рагнетта<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики РАН, Москва,

<sup>2</sup>Университет г. Кальяри, Италия

Исследуются задачи оптимизации формы жесткого штампа, взаимодействующего с упругой средой. Внешние силы, прикладываемые к упругой среде, рассматриваются как случайные величины, имеющие заданные вероятностные характеристики. Найдены оптимальные формы для штампов, имеющих в плане форму круга.

**Ключевые слова:** оптимизация конструкций, контактное взаимодействие, вероятностный подход.

1. Рассматривается равновесие жесткого штампа, контактирующего без трения с упругой средой. Предполагается, что упругая среда заполняет полупространство  $z > 0$  в ортогональной системе координат  $xuz$  и характеризуется упругими константами  $E$  (модуль Юнга) и  $\nu$  (коэффициент Пуассона). Плоскость  $\Omega: z = 0$ , ограничивающая упругую среду, содержит область  $\Omega_f$  (основание штампа) и область приложения внешних нагрузок  $\Omega_q$ , причем  $\Omega_f \cap \Omega_q = \emptyset$ . Область рассматриваемой плоскости  $\Omega_0 = \Omega - \Omega_f - \Omega_q$  предполагается свободной от внешних воздействий. Рассматриваемый в работе штамп имеет форму тонкостенной оболочки, описываемой уравнениями

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_f; \quad z = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_f.$$

В дальнейшем предполагается, что функция  $f(x, y)$  является положительной, непрерывной и гладкой. Данная функция рассматривается в качестве неизвестной переменной проектирования. Внешние силы  $q = \{q_x, q_y, q_z\}$ , прикладываемые к области  $\Omega_q$ , рассматриваются как случайные величины (в том смысле, что случайными являются координаты точки приложения силы) с заданной функцией  $g(\xi, \eta)$  плотности распределения случайных величин  $\xi, \eta$ :

$$q_i = q_i(x, y, \xi, \eta), \quad i = x, y, z.$$

<sup>\*)</sup> Выполнено в рамках реализации Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН № 13, гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-169.2008.1), а также при поддержке РФФИ (проект № 08-08-00025-а).

Для рассматриваемых в работе задач удобно воспользоваться усеченной вероятностной плотностью, определяемой следующим образом:

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} 0, & (\xi, \eta) \notin \Omega_q, \\ \tilde{g}(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \Omega_q, \end{cases}$$

где  $\tilde{g}(\xi, \eta)$  – заданная положительная функция, для которой

$$\int_{\Omega_q} \tilde{g}(\xi, \eta) d\Omega_q = \pi.$$

Тильда в дальнейшем опускается. Предполагается, что граничные условия в областях контакта  $\Omega_f$ , приложения внешних сил  $\Omega_q$  и в ненагруженной области  $\Omega_0$  имеют вид:

$$\sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0, \quad w = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_f; \quad (1)$$

$$\sigma_{xy} = q_x(x, y, \xi, \eta), \quad \sigma_{yz} = q_y(x, y, \xi, \eta), \quad \sigma_{zz} = q_z(x, y, \xi, \eta), \quad (x, y) \in \Omega_q; \quad (2)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_0. \quad (3)$$

Условия контакта с отсутствием трения (1) и условия нагружения (2), (3) содержат компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz}$  и компоненту  $w$  вектора перемещений  $\{u, v, w\}$ , где  $u$ ,  $v$  и  $w$  – проекции данного вектора на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Предположим, что система определяющих уравнений линейной теории упругости с граничными условиями (1)–(3) решена. Тогда распределение давления  $p(x, y)$ , действующего в области  $\Omega_f$ , известно, а величины внешних воздействий на штамп (суммарная сила  $P$ , моменты сил  $M_x$  и  $M_y$ ) в предположении о равновесии системы даются выражениями

$$P = \int_{\Omega_f} p(x, y) d\Omega_f, \quad M_x = \int_{\Omega_f} yp(x, y) d\Omega_f, \quad M_y = \int_{\Omega_f} xp(x, y) d\Omega_f.$$

При этом рассматриваемая в дальнейшем задача оптимизации формы штампа заключается в отыскании неизвестной переменной проектирования  $f(x, y) = f_*$ , для которой оптимизируемый функционал  $J$  (масса штампа-оболочки) достигает минимума:

$$J_* = J(f_*) = \min_f J(f)$$

при ограничениях

$$\Psi_i(\hat{P}, \hat{M}_x, \hat{M}_y) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

наложенных на математические ожидания суммарной силы и полных моментов, которые определяются равенствами

$$\hat{P} = \mathcal{E}(P) = \int_{\Omega_q} P g(\xi, \eta) d\Omega_q, \quad \hat{M}_j = \mathcal{E}(M_j) = \int_{\Omega_q} M_j g(\xi, \eta) d\Omega_q, \quad (j = x, y). \quad (5)$$

В частности, ограничения (4), (5) могут быть представлены в виде равенств

$$\mathcal{E}(P) = P^*, \quad \mathcal{E}(M_j) = M_j^*, \quad (j = x, y),$$

где  $P^*$ ,  $M_x^*$  и  $M_y^*$  – заданные положительные параметры задачи.

Перейдем к определению сил и моментов, прикладываемых к штампу. С этой целью воспользуемся теоремой Бетти и рассмотрим вспомогательный штамп, имею-

щий плоскую форму основания [1]:  $z = f^0(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$ ,  $(x, y) \in \Omega_f$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  – константы.

Аналитическое решение соответствующей контактной задачи для плоского штампа в случае

$$q_x(x, y) = q_y(x, y) = q_z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_q,$$

записывается в виде

$$\begin{aligned} p^0(x, y) &= \alpha p_\alpha^0(x, y) + \beta p_\beta^0(x, y) + \gamma p_\gamma^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_f, \\ u^0(x, y) &= \alpha u_\alpha^0(x, y) + \beta u_\beta^0(x, y) + \gamma u_\gamma^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_q, \\ v^0(x, y) &= \alpha v_\alpha^0(x, y) + \beta v_\beta^0(x, y) + \gamma v_\gamma^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_q, \\ w^0(x, y) &= \alpha w_\alpha^0(x, y) + \beta w_\beta^0(x, y) + \gamma w_\gamma^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_q. \end{aligned} \quad (6)$$

Функции  $p_\alpha^0(x, y)$ ,  $p_\beta^0(x, y)$ ,  $p_\gamma^0(x, y)$  ( $(x, y) \in \Omega_f$ ) и  $u_\alpha^0(x, y)$ ,  $u_\beta^0(x, y)$ , ...,  $w_\gamma^0(x, y)$  ( $(x, y) \in \Omega_q$ ) не зависят от констант  $\alpha, \beta, \gamma$  и для плоского, кругового в плане штампа ( $\Omega_f: x^2 + y^2 \leq a^2$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} p_\alpha^0(x, y) &= \frac{E}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \quad p_\beta^0(x, y) = \frac{2Ex}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \\ p_\gamma^0(x, y) &= \frac{2Ey}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \\ u_\alpha^0(x, y) &= -\frac{a(1-2\nu)x}{\pi(1-\nu)r^2}, \quad u_\beta^0(x, y) = -\frac{4a^3(1-2\nu)(x^2-y^2)}{3\pi(1-\nu)r^4}, \\ u_\gamma^0(x, y) &= -\frac{8a^3(1-2\nu)xy}{3\pi(1-\nu)r^4}, \\ v_\alpha^0(x, y) &= -\frac{a(1-2\nu)y}{\pi(1-\nu)r^2}, \quad v_\beta^0(x, y) = -\frac{8a^3(1-2\nu)xy}{3\pi(1-\nu)r^4}, \\ v_\gamma^0(x, y) &= -\frac{4a^3(1-2\nu)(x^2-y^2)}{3\pi(1-\nu)r^4}, \\ w_\alpha^0(x, y) &= \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a}{r}, \quad w_\beta^0(x, y) = \frac{2x}{\pi} \arcsin \frac{a}{r} - \frac{2ax}{\pi r^2} \sqrt{r^2-a^2}, \\ w_\gamma^0(x, y) &= \frac{2y}{\pi} \arcsin \frac{a}{r} - \frac{2ay}{\pi r^2} \sqrt{r^2-a^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $a$  – радиус области  $\Omega_f$  и  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  [1, 2].

Если функции (6) определены для плоского штампа ( $z = w(x, y) = f_0(x, y)$ ), то определение действующих на оптимальный штамп силы  $P$  и моментов  $M_x, M_y$  существенно упрощается. С использованием теоремы Бетти [1,3] можно показать, что

$$P = P_f(f) - P_q(q), \quad M_j = M_j^f(f) - M_j^q(q), \quad j = x, y, \quad (8)$$

где  $P_f(f)$ ,  $M_j^f$  – заданные выражения,

$$P_f(f) = \int_{\Omega_f} p_\alpha^0 f d\Omega_f, \quad M_x^f = \int_{\Omega_f} p_\gamma^0 f d\Omega_f, \quad M_y^f = \int_{\Omega_f} p_\beta^0 f d\Omega_f, \quad (9)$$

а величины  $P_q(f)$ ,  $M_j^q(q)$ , зависящие от случайных сил  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$ , даются равенствами

$$P_q(q) = \int_{\Omega_q} (u_\alpha^0 q_x + v_\alpha^0 q_y + w_\alpha^0 q_z) d\Omega_q,$$

$$M_y^q(q) = \int_{\Omega_q} (u_\beta^0 q_x + v_\beta^0 q_y + w_\beta^0 q_z) d\Omega_q,$$

$$M_x^q(q) = \int_{\Omega_q} (u_\gamma^0 q_x + v_\gamma^0 q_y + w_\gamma^0 q_z) d\Omega_q.$$

Рассмотрим случай круговой области  $\Omega_f = \{x^2 + y^2 \leq a^2\}$  и прямоугольной области  $\Omega_q = \{x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ . Предположим, что сосредоточенные нагрузки

$$q_x = Q_x^0 \delta(x - \xi, y - \eta), \quad q_y = Q_y^0 \delta(x - \xi, y - \eta), \quad q_z = Q_z^0 \delta(x - \xi, y - \eta)$$

приложены к некоторой точке  $(\xi, \eta) \in \Omega_q$  со случайными координатами  $\xi$  и  $\eta$ ,  $Q_x^0$ ,  $Q_y^0$ ,  $Q_z^0$  и  $x_1, x_2, y_1, y_2$  – заданные константы, а  $\delta(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$  –  $\delta$ -функция Дирака. Пусть  $x_1 > a$ , то есть  $\Omega_f \cap \Omega_q = 0$ . В этом случае будем иметь:

$$P_q(q) = Q_x^0 u_\alpha^0(\xi, \eta) + Q_y^0 v_\alpha^0(\xi, \eta) + Q_z^0 w_\alpha^0(\xi, \eta),$$

$$M_x^q(q) = Q_x^0 u_\gamma^0(\xi, \eta) + Q_y^0 v_\gamma^0(\xi, \eta) + Q_z^0 w_\gamma^0(\xi, \eta), \quad (10)$$

$$M_y^q(q) = Q_x^0 u_\beta^0(\xi, \eta) + Q_y^0 v_\beta^0(\xi, \eta) + Q_z^0 w_\beta^0(\xi, \eta).$$

Полагая внешние сосредоточенные нагрузки  $q_j = q_j(x, y)$ , прикладываемые к области  $\Omega_q \{x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ , независимыми случайными величинами, представим плотность вероятности  $g(\xi, \eta)$  в виде

$$g = g(\xi, \eta) = g_\xi(\xi)g_\eta(\eta).$$

В случае однородного распределения случайных величин

$$g_\xi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < x_1, \\ \frac{1}{x_2 - x_1}, & x_1 < \xi < x_2, \\ 0, & \xi > x_2, \end{cases} \quad g_\eta(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta < y_1, \\ \frac{1}{y_2 - y_1}, & y_1 < \eta < y_2, \\ 0, & \eta > y_2. \end{cases} \quad (11)$$

Соответствующие  $g_\xi(\xi)$ ,  $g_\eta(\eta)$  функции распределения  $F_\xi(\xi)$  и  $F_\eta(\eta)$  даются выражениями

$$F_\xi(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < x_1, \\ \frac{\xi - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 < \xi < x_2, \\ 1, & \xi > x_2, \end{cases} \quad F_\eta(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta < y_1, \\ \frac{\eta - y_1}{y_2 - y_1}, & y_1 < \eta < y_2, \\ 1, & \eta > y_2. \end{cases}$$

Математические ожидания прикладываемых к штампу силы и моментов даются формулами

$$\hat{P} = \mathcal{E}(p) = P_f(f) - \mathcal{E}(P_q(q)), \quad (12)$$

$$\hat{M} = \mathcal{E}(M_j) = M_j^f(f) - \mathcal{E}(M_j^q(q)), \quad j = x, y,$$

или, с учетом представлений (10), (11),

$$\begin{aligned} \hat{P} &= P_f(f) - \frac{1}{S} \int_{\Omega_q} [Q_x^0 u_\alpha^0 + Q_y^0 v_\alpha^0 + Q_z^0 w_\alpha^0] g(\xi, \eta) d\Omega_q, \\ \hat{M}_x &= M_x^f(f) - \frac{1}{S} \int_{\Omega_q} [Q_x^0 u_\gamma^0 + Q_y^0 v_\gamma^0 + Q_z^0 w_\gamma^0] g(\xi, \eta) d\Omega_q, \\ \hat{M}_y &= M_y^f(f) - \frac{1}{S} \int_{\Omega_q} [Q_x^0 u_\beta^0 + Q_y^0 v_\beta^0 + Q_z^0 w_\beta^0] g(\xi, \eta) d\Omega_q, \end{aligned}$$

где  $S = \text{mes} \Omega_q = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$  – площадь области приложения внешних нагрузок.

2. Рассмотрим задачу оптимизации формы жесткого штампа-оболочки, заключающуюся в минимизации функционала

$$J = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega_f} (\nabla f)^2 d\Omega_f \rightarrow \min_f \quad (13)$$

при ограничениях

$$\hat{P} = P^*, \quad \hat{M}_x = M_x^*, \quad \hat{M}_y = M_y^*, \quad (14)$$

наложенных на величины силы и моментов. Здесь  $\rho = h\rho_0$  ( $h$  – толщина оболочки,  $\rho_0$  – плотность материала оболочки),  $\nabla$  – оператор градиента, а  $P^*$ ,  $M_x^*$ ,  $M_y^*$  – заданные параметры задачи. Функционал (13) представляет собой часть массы оболочки, зависящую от искомой переменной проектирования  $f(x, y)$ , описывающей форму оболочки.

Используя формулы (13), (8), (9), (12), составим расширенный функционал Лагранжа

$$J^L = \int_{\Omega_f} \left[ \frac{\rho}{2} (\nabla f)^2 - \lambda_\alpha p_\alpha^0 f - \lambda_\beta p_\beta^0 f - \lambda_\gamma p_\gamma^0 f \right] d\Omega_f, \quad (15)$$

где функции  $p_\alpha^0(r)$ ,  $p_\beta^0(r, \theta)$  и  $p_\gamma^0(r, \theta)$  записываются в виде

$$\begin{aligned} p_\alpha^0 &= \frac{E}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{a^2-r^2}}, \quad r = \sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ p_\beta^0(r, \theta) &= \frac{2Er \cos \theta}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{a^2-r^2}}, \quad p_\gamma^0(r, \theta) = \frac{2Er \sin \theta}{\pi(1-\nu^2)\sqrt{a^2-r^2}}, \end{aligned}$$

а множители Лагранжа  $\lambda_\alpha$ ,  $\lambda_\beta$ ,  $\lambda_\gamma$  определяются при помощи соотношений (14). Радиус  $r$  и угол  $\theta$  принадлежат области  $\Omega_f = \{0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Необходимые условия оптимальности функционала (15) (уравнения Эйлера) и граничные условия для искомой функции  $f$  составляют следующую однородную граничную задачу:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = -\frac{\lambda_\alpha}{\rho} p_\alpha^0(r) - \frac{\lambda_\beta}{\rho} p_\beta^0(r, \theta) - \frac{\lambda_\gamma}{\rho} p_\gamma^0(r, \theta), \quad (16)$$

$$f(r, \theta)|_{r=a} = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (17)$$

Искомое ограниченное решение уравнения Пуассона (16) с краевыми условиями Дирихле (17) удобно представить в следующей форме:

$$f(r, \theta) = f_\alpha(r) + f_\beta(r, \theta) + f_\gamma(r, \theta),$$

$$f_\alpha(r) = \lambda_\alpha \chi_\alpha(r), \quad f_\beta(r, \theta) = \lambda_\beta \chi_\beta(r, \theta), \quad f_\gamma(r, \theta) = \lambda_\gamma \chi_\gamma(r, \theta).$$

Функции формы  $\chi_i$  ( $i = \alpha, \beta, \gamma$ ) должны удовлетворять краевым задачам

$$\Delta \chi_i = -\frac{1}{\rho} p_i^0, \quad \chi_i|_{r=a} = 0 \quad (i = \alpha, \beta, \gamma) \quad (18)$$

и условию ограниченности:  $\chi_i < \infty$  при  $r \rightarrow 0$ . Множители Лагранжа  $\lambda_i$  ( $i = \alpha, \beta, \gamma$ ) определяются при помощи изопериметрических условий (14), которые приводят к системе трех линейных алгебраических уравнений

$$A_{\alpha\alpha} \lambda_\alpha + A_{\alpha\beta} \lambda_\beta + A_{\alpha\gamma} \lambda_\gamma = P^* + B_\alpha,$$

$$A_{\beta\alpha} \lambda_\alpha + A_{\beta\beta} \lambda_\beta + A_{\beta\gamma} \lambda_\gamma = M_y^* + B_\beta, \quad (19)$$

$$A_{\gamma\alpha} \lambda_\alpha + A_{\gamma\beta} \lambda_\beta + A_{\gamma\gamma} \lambda_\gamma = M_x^* + B_\gamma,$$

где коэффициенты  $A_{ij}$  и величины  $B_i$  определяются формулами

$$A_{ij} = \int_{\Omega_f} p_i^0 \chi_j d\Omega_f, \quad i = \alpha, \beta, \gamma, \quad j = \alpha, \beta, \gamma, \quad (20)$$

$$B_i = \int_{\Omega_f} (Q_x^0 u_i^0 + Q_y^0 v_i^0 + Q_z^0 w_i^0) g d\Omega_f.$$

Принимая во внимание, что в случае  $i = \alpha$  функция  $p_\alpha^0 = p_\alpha^0(r)$  является осесимметричной (относительно оси  $z$ ), и решая краевую задачу (18) с  $i = \alpha$ , найдем соответствующую функцию формы:

$$\chi_\alpha(r) = \frac{E}{\rho \pi (1 - \nu^2)} \left[ \sqrt{a^2 - r^2} - a \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{a} \right) \right]. \quad (21)$$

Если  $i = \beta, \gamma$ , соответствующие решения краевых задач (18) для уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле могут быть найдены в аналитической форме. Для отыскания функции формы  $\chi_\beta(r, \theta)$  запишем уравнение (18) в виде

$$\frac{\partial^2 \chi_\beta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_\beta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_\beta}{\partial \theta^2} = -\frac{2}{\rho} r p_\alpha^0(r) \cos \theta \quad (22)$$

и представим решение этого уравнения как

$$\chi_\beta(r, \theta) = \chi^0(r) \cos \theta. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и выполняя элементарные преобразования, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $\chi^0(r)$ :

$$\frac{d^2 \chi^0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi^0}{dr} - \frac{1}{r^2} \chi^0 = \frac{2K}{\rho} \frac{d}{dr} (\sqrt{a^2 - r^2}), \quad K = \frac{E}{\pi(1 - \nu^2)}. \quad (24)$$

Выполнив интегрирование в (24), найдем

$$r\chi^0(r) = -\frac{2K}{3\rho}(a^2 - r^2)^{3/2} + \frac{C}{2}r^2 + D,$$

где  $C$  и  $D$  – произвольные константы интегрирования. Для отыскания их используем граничное условие (18) ( $\chi^0(a) = 0$ ) и условие ограниченности решения:  $\chi^0(0) < \infty$ . В результате получим

$$C = -\frac{4K}{3\rho}a, \quad D = \frac{2Ka^3}{3\rho}$$

и, следовательно, функция формы  $\chi_\beta(r, \theta)$  запишется в виде

$$\chi_\beta(r, \theta) = \chi^0(r) \cos \theta = \frac{2E \cos \theta}{3\pi(1 - \nu^2)\rho r} \{a(a^2 - r^2) - (a^2 - r^2)^{3/2}\}.$$

Аналогичным образом найдем функцию формы  $\chi_\gamma(r, \theta)$ :

$$\chi_\gamma(r, \theta) = \chi^0(r) \sin \theta = \frac{2E \sin \theta}{3\pi(1 - \nu^2)\rho r} \{a(a^2 - r^2) - (a^2 - r^2)^{3/2}\}.$$

Отметим теперь некоторые свойства функций формы  $\chi_\alpha(r) = \chi_\alpha(x, y)$ ,  $\chi_\beta(r, \theta) = \chi_\beta(x, y)$ ,  $\chi_\gamma(r, \theta) = \chi_\gamma(x, y)$ . Как видно из выражений (7), для функций  $p_\alpha^0$ ,  $p_\beta^0$ ,  $p_\gamma^0$  справедливы следующие равенства:

$$p_\beta^0(-x, y) = -p_\beta^0(x, y), \quad p_\beta^0(x, -y) = p_\beta^0(x, y),$$

$$p_\gamma^0(-x, y) = p_\gamma^0(x, y), \quad p_\gamma^0(x, -y) = -p_\gamma^0(x, y).$$

Следовательно, решения краевых задач (18) характеризуются соотношениями симметрии:

$$\chi_\beta(-x, y) = -\chi_\beta(x, y), \quad \chi_\beta(x, -y) = \chi_\beta(x, y),$$

$$\chi_\gamma(-x, y) = \chi_\gamma(x, y), \quad \chi_\gamma(x, -y) = -\chi_\gamma(x, y).$$

Учитывая соотношения симметрии и формулы (20), для коэффициентов системы уравнений (19), получим

$$A_{\gamma\alpha} = A_{\beta\alpha} = A_{\alpha\beta} = A_{\alpha\gamma} = A_{\gamma\beta} = A_{\beta\gamma} = 0.$$

Следовательно, решение системы уравнений (19) имеет вид

$$\lambda_\alpha = \frac{P^* + B_\alpha}{A_{\alpha\alpha}}, \quad \lambda_\beta = \frac{M_y^* + B_\beta}{A_{\beta\beta}}, \quad \lambda_\gamma = \frac{M_x^* + B_\gamma}{A_{\gamma\gamma}}.$$

Найденные функции формы показаны на рис. 1–3 для значения параметра  $a = 1$ . Осесимметричная функция формы, отвечающая случаю учета только ограничения на внешние нагрузки и определяемая выражением (21), представлена на рис. 1, где вдоль оси  $Oz$  отложена величина  $\chi_\alpha \rho \pi (1 - \nu^2)/E$ . Рис. 2 соответствует случаю, когда учитывается ограничение на величину момента  $M_y$ . Здесь вдоль оси  $Oz$  отложена величина  $\chi_\beta 3\rho \pi (1 - \nu^2)/(2E)$ . Величина  $\chi_\gamma 3\rho \pi (1 - \nu^2)/(2E)$ , представленная на рис. 3, характеризует функцию формы при учете ограничения на момент  $M_x$ . Видно, что функции формы, показанные на рис. 2–3, не являются осесимметричными.

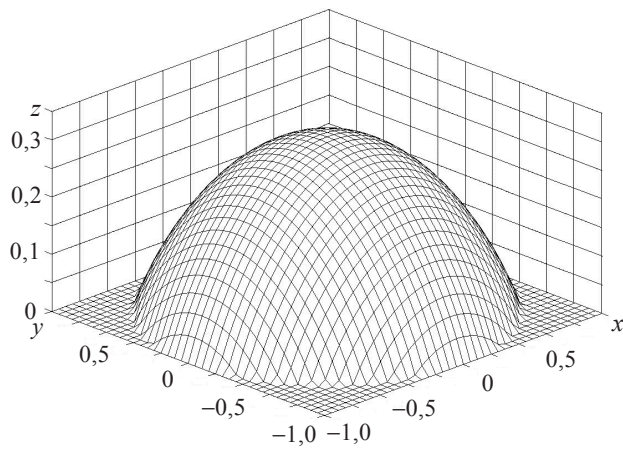


Рис. 1

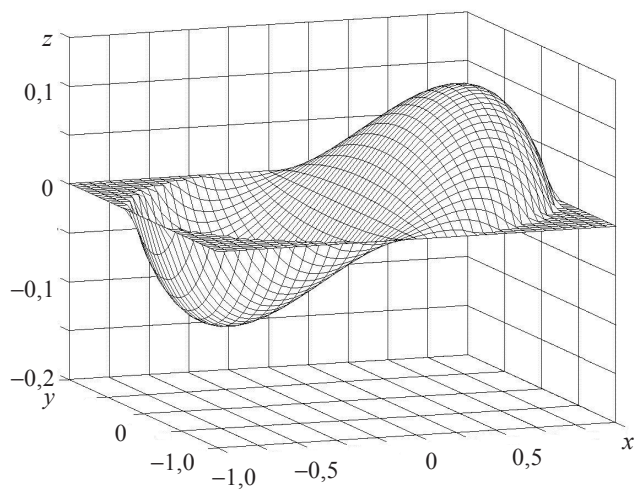


Рис. 2

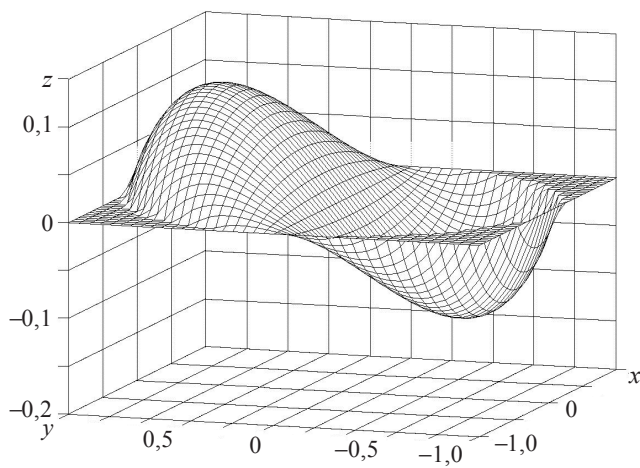


Рис. 3



*Литература*

1. *Моссаковский, В.И.* Применение теоремы взаимности к определению суммарных сил и моментов в пространственных контактных задачах / В.И. Моссаковский // Прикладная математика и механика. – 1953. – Т. XVII, №4. – С. 477–482.
2. *Галин, Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
3. *Love, A.E.H.* A treatise on the mathematical theory of elasticity / A.E.H. Love. – New York: Dover Publications Inc., 1944. – 405 p.

[30.03.2009]

**OPTIMAL STAMP SHAPE UNDER PROBABILISTIC DATA  
CONCERNING EXTERNAL LOADING**

**N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova, E.V. Makeev, F. Ragnedda**

The problems of a rigid stamp shape optimization are investigated taking into account the interaction of the stamp with an elastic medium. The external forces applied to the elastic medium are considered as random values having given statistic characteristics. The optimal shapes are found for the stamps having circular shape in plan.

**Key words:** structural optimization, contact interaction, probabilistic approach.