

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ  
СЛОЖНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ  
ПО ЗАМКНУТЫМ ТРАЕКТОРИЯМ  
НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
ПРИ МАЛОЦИКЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ<sup>\*)</sup>**

**Ю.Г. Коротких, И.А. Волков, И.С. Тарасов, А.Н. Бородой**

*Волжская государственная академия водного транспорта,  
Нижний Новгород*

Для оценки степени адекватности и определения границ применимости теории пластичности с кинематическим и изотропным упрочнением проведены численные исследования сложного пластического деформирования ряда конструкционных сталей по замкнутым траекториям непропорционального нагружения при малоцикловых испытаниях и выполнено сравнение полученных численных результатов с данными натурных экспериментов и численными результатами, полученными другими авторами. Показано, что предлагаемая модель качественно и количественно описывает основные эффекты сложного пластического деформирования металлов при произвольных непропорциональных путях малоциклового нагружения.

**Ключевые слова:** пластичность, сложное деформирование, малоцикловое нагружение, траектория деформирования, напряженно-деформированное состояние.

### **1. Введение**

Экспериментальные исследования [1–8] упругопластического деформирования металлов (в основном нержавеющей стали) при непропорциональном циклическом нагружении показали, что изотропное упрочнение значительно превышает упрочнение при пропорциональном циклическом нагружении. Это явление было названо эффектом дополнительного упрочнения [9] или локального дополнительного упрочнения [6]. На рис. 1 приведены результаты экспериментальных исследований нержавеющей стали 316 (аналога отечественных нержавеющей сталей) при монотонном (кривая 1) и циклических пропорциональных (кривая 2) нагружениях, а также при циклических непропорциональных нагружениях по траекториям деформаций (жесткое нагружение) в виде окружностей с центром в начале координат (кривая 3) [4].

---

<sup>\*)</sup> Выполнено при поддержке РФФИ (проект 09-08-00266-а) и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-169.2008.1).

По оси абсцисс отложены значения амплитуды циклических пластических деформаций  $\Delta e^p/2$ , а по оси ординат – значение максимальной интенсивности напряжений  $\sigma_u^{\max}$  в состоянии циклической стабилизации. Видно существенное дополнительное изотропное упрочнение, которое увеличивается с увеличением амплитуды циклических пластических деформаций.

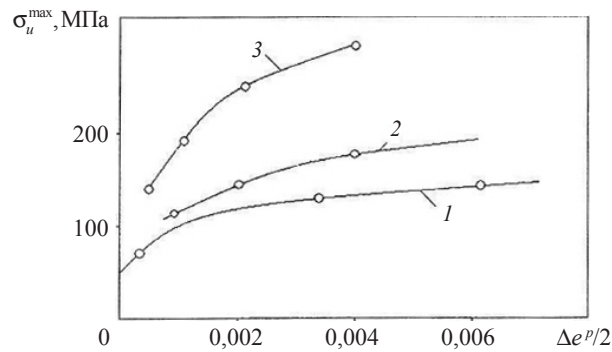


Рис. 1

Эффект дополнительного упрочнения зависит от вида траектории циклического непропорционального нагружения. На рис. 2 приведены результаты экспериментальных исследований нержавеющей стали 316 при циклических пропорциональных (кривая 1) и непропорциональных нагружениях по траекториям в виде «креста» (кривая 2), и в виде «окружности» (кривая 3) [5]. Амплитуда циклических пластических деформаций для всех траекторий нагружения была одинакова и равна 0,002. По оси абсцисс отложена накопленная пластическая деформация  $e_u^p$ , а по оси ординат – значение максимальной интенсивности напряжений в цикле  $\sigma_u^{\max}$ . Видно существенное отличие дополнительного упрочнения для разных траекторий непропорционального нагружения. Как показывают экспериментальные исследования, наибольшим дополнительным упрочнением обладает непропорциональное нагружение по траектории в виде окружности [4, 5].

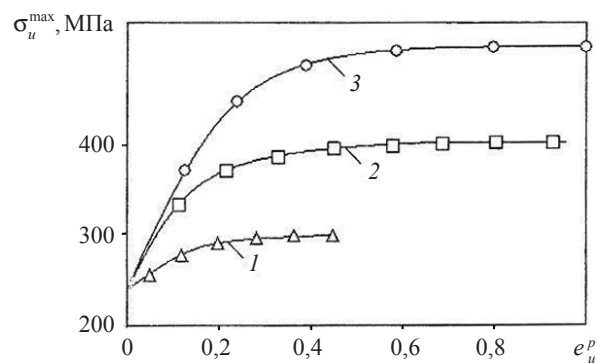


Рис. 2

Очевидно, что отмеченный эффект дополнительного упрочнения при циклическом непропорциональном деформировании необходимо учитывать в расчетах процессов сложного нагружения.

Впервые описание эффекта дополнительного упрочнения при циклическом не-

пропорциональном нагружении предпринято Беналлалом и Марки [10]. Основой этой теории послужили определяющие соотношения, предложенные Шабошем [11]. Несколько иное построение теории, учитывающей эффект дополнительного изотропного упрочнения, содержится в работе [12]. Учет эффекта дополнительного изотропного упрочнения осуществляется и в эндохронной теории пластичности [13].

В работе [9] в качестве варианта описания дополнительного циклического упрочнения предложена аппроксимация функции упрочнения, включающая пять материальных параметров (констант), определяемых из опытов на циклическое пропорциональное и непропорциональное нагружение, что в значительной мере усложняет определяющие соотношения пластичности при циклическом непропорциональном нагружении. В рамках теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина, развитой в работах В.Г. Зубчанинова, для описания этого эффекта в [6] предложен один из возможных вариантов аппроксимации определяющих функций пластичности, применяемых в рамках гипотезы компланарности.

В [14, 15] развита математическая модель термопластичности с кинематическим и изотропным упрочнением, описывающая процессы сложного пластического деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов) при монотонных и циклических, пропорциональных и непропорциональных режимах термодинамического нагружения.

Для скорости изменения радиуса поверхности текучести  $C_p$  (изотропное упрочнение) с учетом разделения процессов монотонного и циклического нагружения, принимается следующая структура:

$$\dot{C}_p = [q_\chi H(F_p) + a(Q_s - C_p)\Gamma(F_p)]\dot{\chi} + q_3\dot{T}, \quad (1)$$

$$C_p = C_p^o + \int_0^t \dot{C}_p, \quad \dot{\chi} = \left( \frac{2}{3} \dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p \right)^{1/2}, \quad \chi_m = \int_0^t \dot{\chi} H(F_p) dt, \quad \chi = \int_0^t \dot{\chi} dt, \quad (2)$$

$$q_\chi = \frac{q_2 A \Psi_1 + (1-A)q_1}{A \Psi_1 + (1-A)}, \quad Q_s = \frac{Q_2 A \Psi_2 + (1-A)Q_1}{A \Psi_2 + (1-A)}, \quad 0 \leq \Psi_i \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

$$A = 1 - \cos^2 \theta, \quad \cos \theta = n_{ij}^e n_{ij}^s, \quad n_{ij}^e = \frac{\dot{e}_{ij}'}{(\dot{e}_{ij}' \dot{e}_{ij}')^{1/2}}, \quad n_{ij}^s = \frac{S_{ij}}{(S_{ij} S_{ij})^{1/2}},$$

$$H(F_p) = \begin{cases} 1, & F_p = 0 \wedge \rho_{ij} \dot{\rho}_{ij} > 0 \\ 0, & F_p < 0 \vee \rho_{ij} \dot{\rho}_{ij} \leq 0 \end{cases}, \quad \Gamma(F_p) = 1 - H(F_p). \quad (3)$$

Здесь  $q_1, q_2, q_3$  – модули изотропного упрочнения,  $Q_1$  и  $Q_2$  – модули циклического изотропного упрочнения,  $a$  – постоянная, определяющая скорость процесса стационарирования петли гистерезиса циклического деформирования материала,  $Q_s$  – стационарное значение радиуса поверхности текучести при данных  $\rho_{\max}$  (максимально допускаемое смещение центра поверхности текучести) и  $T$ ,  $C_p^o$  – начальное значение радиуса поверхности текучести,  $\chi_m, \chi$  – длина траектории пластического деформирования при монотонном и циклических режимах нагружения соответственно.

В уравнении (1) первый член описывает изотропное упрочнение в результате монотонного пластического деформирования ( $H(F_p) = 1$  и  $\Gamma(F_p) = 0$ ), второй член

описывает циклическое упрочнение материала ( $H(F_p) = 0$  и  $\Gamma(F_p) = 1$ ), а третий – изменение радиуса поверхности текучести при изменении температуры.

Модуль изотропного упрочнения  $q_\chi$  учитывает изменение изотропного упрочнения материала в зависимости от направления деформирования в данной точке, которое характеризует угол  $\theta$  между вектором приращения девиатора деформаций, имеющим направляющие косинусы  $n_{ij}^e$ , и нормалью к поверхности текучести в точке, определяемой направляющими косинусами  $n_{ij}^s$ . При пропорциональном нагружении  $\theta = 0$ ,  $A = 0$  и  $q_\chi = q_1$ , где  $q_1$  – модуль изотропного упрочнения материала при пропорциональном нагружении (одноосном растяжении материала). При непропорциональном нагружении  $\theta = \pi/2$ ,  $A = 1$  и  $q_\chi = q_2$ , где  $q_2$  – модуль упрочнения при нагружении по касательной к поверхности текучести (нейтральное нагружение).

Аналогично для циклического изотропного упрочнения при циклическом пропорциональном нагружении  $\theta = 0$  и  $Q_s = Q_1$ , а при циклическом непропорциональном нагружении  $\theta = \pi/2$  и  $Q_s = Q_2$ . Тарировочные (весовые) коэффициенты  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – параметры, позволяющие корректировать влияние модулей  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$  на изотропное упрочнение материала.

При стационарном циклическом деформировании материала с постоянной амплитудой деформаций и  $T = \text{const}$  ( $\rho_{\max} = \text{const}$ ,  $Q_s = \text{const}$ ), радиус поверхности текучести  $C_p$  стремится к  $Q_s = \text{const}$ , и параметры петли гистерезиса стремятся к своему стационарному значению, определяемому значением  $Q_s$ , зависящему от текущих значений  $T$  и  $\rho_{\max}$ .

Уравнение для смещения поверхности текучести основано на гипотезе А.А. Ильюшина, заключающейся в том, что упрочнение зависит от истории деформирования лишь на некоторой ближайшей части траектории (запаздывание векторных свойств). Эволюция внутренней переменной  $\rho_{ij}$ , описывающей анизотропию упрочнения пластического деформирования материала, применяется в виде:

$$\dot{\rho}_{ij} = g_1 \dot{\epsilon}_{ij}^p - g_2 \rho_{ij} \dot{\chi} - g_3 \rho_{ij} \langle \dot{T} \rangle, \quad (4)$$

$$\langle \dot{T} \rangle = \begin{cases} \dot{T}, & \dot{T} > 0, \\ 0, & \dot{T} \leq 0, \end{cases}$$

где  $g_1 > 0$ ,  $g_2 > 0$ ,  $g_3 > 0$  – модули анизотропного упрочнения (функции температуры).

Ниже проведена оценка применимости определяющих соотношений термопластичности [14, 15] путем сопоставления полученных численных результатов с опубликованными в [6–8] экспериментальными данными и численными результатами по исследованию процессов непропорционального циклического пластического деформирования конструкционных сталей по замкнутым траекториям при сложном нагружении.

## 2. Сравнение численных результатов с экспериментальными данными

В [6–8] приведены результаты экспериментальных исследований пропорционального и непропорционального циклического упругопластического деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов), которые были получены в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СМ-ЭВМ под общим руководством профессора В.Г. Зубчанинова. Эксперименты были выпол-

нены при нормальной температуре  $T = 20^\circ \text{C}$  на тонкостенных цилиндрических образцах с длиной рабочей части  $l = 110$  мм, толщиной стенки  $h = 1$  мм и радиусом срединной поверхности  $R = 15,5$  мм. Материалы образцов – сталь 45, сталь X16H9Г2С, сталь 9Х2, сплав Д16 и др. Образцы нагружались осевой силой  $P$ , внутренним давлением  $q$  и крутящим моментом  $M$ . Компоненты тензоров напряжений и деформаций в рабочей части образца вычислялись по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= P/2\pi R h, & \sigma_{22} &= qR/h, & \sigma_{12} &= M/2\pi R h^2, & \sigma_{33} &= \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \\ e_{11} &= \Delta l/l, & e_{22} &= \Delta R/R, & e_{12} &= \phi R/2l,\end{aligned}$$

где  $\Delta l$  – изменение длины,  $\phi$  – угол закручивания образца.

В опытах измерялись деформации  $e_{11}$ ,  $e_{22}$ ,  $e_{12}$  и напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  в рабочей части образца. Векторы напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в трехмерном совмещенном подпространстве девиаторов с общим неподвижным репером  $\{\mathbf{e}_\kappa\}$  имеют вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = S_\kappa \mathbf{e}_\kappa, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{E}_\kappa \mathbf{e}_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Компоненты векторов  $S_\kappa$ ,  $\mathcal{E}_\kappa$  векторов напряжений и деформаций и их модули  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  вычислялись по формулам:

$$\begin{aligned}S_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_{11} - \sigma_0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \sigma_{11} - \frac{1}{2}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right], & S_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_{22} - \sigma_{33}), & S_3 &= \sqrt{2}\sigma_{12}, \\ \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(e_{11} - e_0), & \mathcal{E}_2 &= \sqrt{2} \left( e_{22} + \frac{1}{2}e_{11} - \frac{3}{2}e_0 \right), & \mathcal{E}_3 &= \sqrt{2}e_{12}, \\ \sigma &= \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, & \varepsilon &= \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + \mathcal{E}_3^2},\end{aligned} \quad (6)$$

где

$$e_0 = \frac{1}{3}(e_{11} + e_{22} + e_{33}), \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}).$$

При обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости  $e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$  и считалось, что  $\sigma_{33} = 0$  [6–8].

Эксперименты выполнены по схеме жесткого нагружения. В качестве траекторий сложного нагружения исследовались траектории постоянной кривизны в плоскости  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$  девиаторного пространства деформаций А.А. Ильюшина.

Экспериментально обнаружено [4–6], что максимальная степень дополнительного циклического упрочнения проявляется на траекториях постоянной кривизны. Причем эксперименты на стали 45 показали [6], что уже в начале третьего цикла траектория нагружения стабилизируется при дополнительном упрочнении порядка 15–25%. Аналогичный эффект наблюдался на стали 9Х2 и сплаве Д16 [6, 7].

Для стали X16H9Г2С наблюдалось существенно большее дополнительное циклическое упрочнение, чем у вышеперечисленных материалов [6]. Эксперименты также показали, что степень циклического упрочнения материала, как на первом витке, так и в целом на траектории, существенно зависит от кривизны траектории деформирования и возрастает с уменьшением радиуса кривизны [6].

При численном моделировании данных экспериментальных процессов с использованием развитых определяющих соотношений упругопластичности [14, 15] заданными являлись экспериментальные траектории деформаций (закономерности

изменения компонент тензора деформации  $e_{ij}(t)$ , а траектории напряжений получались в результате интегрирования определяющих соотношений упругопластичности по заданной истории изменения  $e_{ij}$ . Полученные численные результаты сопоставлялись с экспериментальными данными.

Результаты испытаний для траектории деформирования постоянной кривизны  $k_1 = 161$ , реализуемой из начала координат в плоскости  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$  девиаторного пространства деформаций, их сравнение с численными решениями [6], полученными по другим модельным представлениям, приведены на рис. 3, 4. Материал образцов – сталь 45. Расчетный анализ процесса деформирования лабораторного образца с использованием модели пластичности с кинематическим и изотропным упрочнением проводился при следующих материальных параметрах для стали 45: модуль сдвига  $G = 76923$  МПа, модуль объемного сжатия  $K = 166667$  МПа, начальный радиус поверхности текучести  $C_p^o = 300$  МПа, модули анизотропного упрочнения  $g_1 = 800$  МПа,  $g_2 = 20$  МПа (ввиду отсутствия надежных экспериментальных данных для стали 45 моделировалось только кинематическое упрочнение).

На рис. 3 представлена диаграмма сложного пластического деформирования  $\sigma - \varepsilon$ ; на рис. 4 – отклик на программу испытаний в векторном пространстве напряжений.

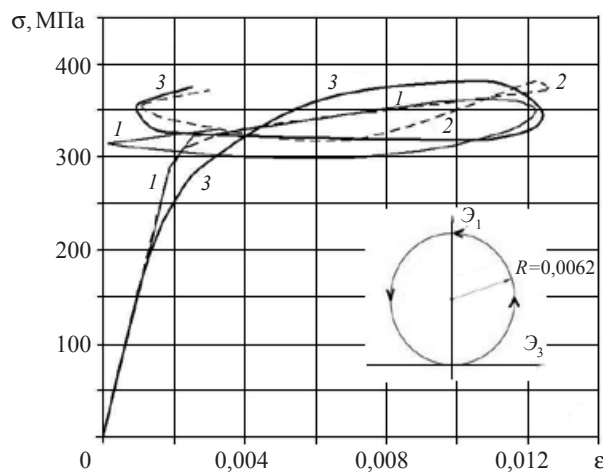


Рис. 3

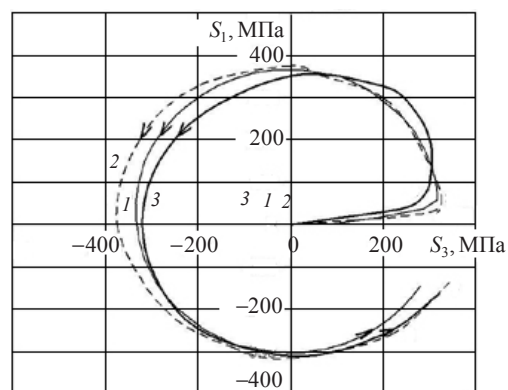


Рис. 4

Сплошными линиями 1 на рис. 3, 4 обозначены численные результаты, полученные авторами, пунктирными линиями 2 – опытные данные [6], жирными линиями 3 отмечены численные решения [6]. Видно качественное и количественное совпадение опытных и модельных предположений. В среднем по длине дуги реализованной траектории деформаций различие экспериментальных и расчетных величин  $S_i$  ( $i = 1, 3$ ) не превышает 9%, что лежит в рамках естественного разброса экспериментальных данных при простом нагружении для данного материала.

В следующем примере представлены результаты исследования непропорционального циклического упругопластического деформирования цилиндрической оболочки, выполненной из стали X16H9Г2С, при растяжении с кручением по замкнутым криволинейным траекториям постоянной кривизны в плоскости  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ . Оболочка была растянута до значения  $\mathcal{E}_1^{\max} = 0,018$ , после чего в плоскости  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$  реализовывалось три витка траектории постоянной кривизны  $k_1 = 100$ , причем  $\mathcal{E}_1^{\max}$  на окружности было равно 0,018.

Для расчета использовались физико-механические характеристики и материальные параметры определяющих соотношений стали X16H9Г2С, приведенные в табл. 1–3 (моделировалось кинематическое и изотропное упрочнение).

Таблица 1

Физико-механические характеристики и параметры стали X16H9Г2С

$K$ , МПа	$G$ , МПа	$E$ , МПа	$\alpha$ , град <sup>-1</sup>	$C_p^0$ , МПа	$g_1$ , МПа	$g_2$ , МПа	$a$
116789	60220	154162	0,0000166	130	40000	400	35

Таблица 2

Модуль монотонного упрочнения  $q_1(\chi)$  стали X16H9Г2С при  $T = 20^\circ \text{C}$

$\chi$	0	0,003	0,004	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,012	0,015	0,018	0,021	0,023	0,3	0,4
$q_1$ , МПа	3000	500	200	600	700	800	900	950	1000	1000	1000	1000	985	750	0

Таблица 3

Модуль циклического упрочнения  $Q_1(\rho_{\max})$  стали X16H9Г2С при  $T = 20^\circ \text{C}$

$\rho_{\max}$ , МПа	0	32,09	50	54,5	66,38	73,6	81,4	96,1	100	104,5	112,8	147	150
$Q_1$ , МПа	195,1	204,7	210,1	211,5	215	217,2	220,5	226,7	228,4	230,3	272,6	300	300

На рис. 5 изображена диаграмма сложного пластического деформирования стали X16H9Г2С; на рис. 6 – отклик на программу испытаний в векторном пространстве напряжений. Сплошными линиями 1 на рис. 5, 6 обозначены численные результаты авторов, пунктирными линиями 2 – опытные данные [6], буквами  $A, B, C, D$  отмечены начала соответствующих витков.

Видно, что даже на четвертом витке траектории параметры напряженного состояния не стабилизируются и дальнейшее продолжение процесса сопровождается ростом  $\sigma$  в текущей точке траектории (отметим, что эксперимент был остановлен в связи с исчерпанием функциональных возможностей силовых агрегатов испы-

тательного комплекса по нагрузкам [6]). При этом величина модуля вектора напряжения в начале четвертого витка приблизительно на 70% превышает значение  $\sigma$  в точке излома (см. рис. 6).

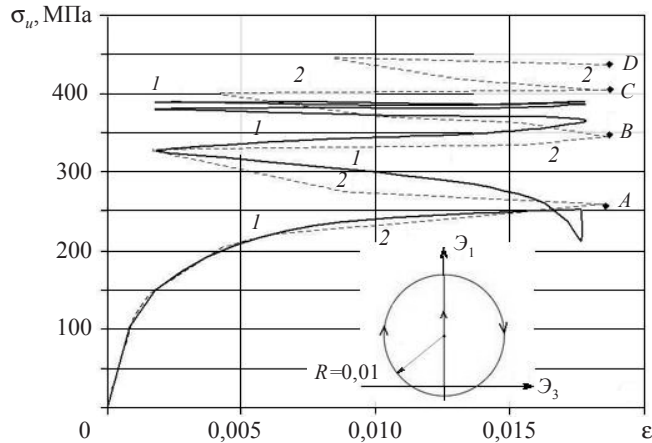
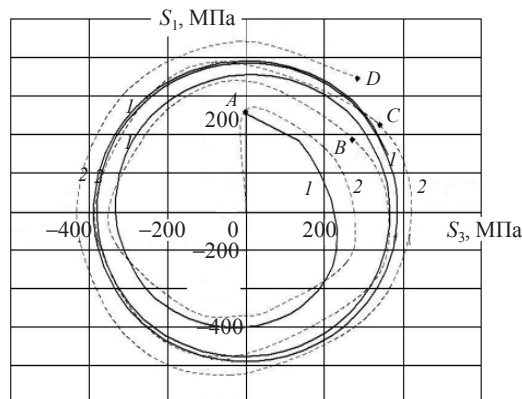


Рис. 5



Различие расчетных и экспериментальных величин  $\sigma$  и компонент вектора напряжений  $S_i$  ( $i = 1, 3$ ) по длине дуги траектории не превышает 15%, что лежит в рамках естественного разброса экспериментальных данных при простом нагружении для данного материала.

В целом, анализируя полученные численные результаты в сравнении с экспериментальными данными, можно отметить качественное и количественное совпадение модельных представлений с опытными данными [6] по сложному пластическому деформированию конструкционных сталей при малоцикловом нагружении. Некоторое отличие расчетных значений от экспериментальных данных может быть объяснено, в частности, неточностями при задании материальных параметров и тем фактом, что при обработке экспериментальных данных принималось условие несжимаемости материала.



### 3. Заключение

Проведена оценка адекватности определяющих соотношений модели пластичности с изотропным и кинематическим упрочнением [14, 15] путем сопоставления результатов численных экспериментов с опытными данными по сложному пластическому деформированию по замкнутым траекториям при малоцикловом нагружении, которая подтвердила правильность моделирования процессов сложного пластического деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов). Отмечено, что адекватное описание сложного пластического деформирования конструкционных материалов при циклическом нагружении невозможно в рамках модельных представлений для описания монотонных процессов деформирования. Показано, что в рамках развитых модельных представлений [14, 15] учесть эффект дополнительного упрочнения материалов при деформировании по замкнутым траекториям непропорционального нагружения с точностью, достаточной для инженерных расчетов, можно без введения дополнительных материальных параметров в законах упрочнения [9] и без построения сложных аппроксимаций определяющих функционалов пластичности [6].

#### *Литература*

1. Лэмба. Пластичность при циклическом нагружении по непропорциональным траекториям / Лэмба, Сайдботтом // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1978. – Т. 100, № 1. – С. 108–126.
2. Макдауэлл. Экспериментальное изучение структуры определяющих уравнений для непропорциональной циклической пластичности / Макдауэлл // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1985. – №4. – С. 98–111.
3. Охаси. Неупругое поведение стали 316 при многоосных непропорциональных циклических нагружениях при повышенной температуре / Охаси, Каваи, Каито // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1985. – Т. 107, № 2. – С. 6–15.
4. Tanaka, E. Effects of plastic strain amplitudes on non-proportional cyclic plasticity / E. Tanaka, S. Murakami, M. Ooka // ActaMech. – 1985. – Vol. 57. – P. 167–182.
5. Tanaka, E. Effects of strain path shapes on nonproportional cyclic plasticity / E. Tanaka, S. Murakami, M. Ooka // J. Mech. Phys. Solids. – 1985. – Vol. 33, No. 6. – P. 559–575.
6. Зубчанинов, В.Г. О деформировании конструкционных сталей по замкнутым траекториям непропорционального нагружения / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков // Математическое моделирование систем и процессов : сб. научн. тр. / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 1998. – №6. – Вып 1. – С. 30–37.
7. Зубчанинов, В.Г. Экспериментальная пластичность. Кн. 1 Процессы сложного деформирования. / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гаранников. – Тверь: ТГТУ, 2003. – 172 с.
8. Зубчанинов, В.Г. Экспериментальная пластичность. Кн. 2 Процессы сложного нагружения. / В.Г. Зубчанинов, Н.Л. Охлопков, В.В. Гаранников. – Тверь: ТГТУ, 2004. – 184 с.
9. Трусов, П.В. Об определяющих соотношениях пластичности при циклическом непропорциональном нагружении / П.В. Трусов, И.Э. Келлер, Б.Д. Онискив // Математическое моделирование систем и процессов : сб. научн. тр. / Перм. гос. техн. ун-т. – Пермь, 1994. – №2. – Вып 2. – С. 90–102.
10. Benallal, A. Constitutive equations for nonproportional cyclic elasto-viscoplasticity / A. Benallal, D. Marquis // J. of Engineering Materials and Technology. – 1987. – V. 109. – P. 326–337.
11. Chaboche, J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity / J.L. Chaboche // Int. J. of Plasticity. – 1989. – Vol. 5, No. 3. – P. 247–302.
12. Бондарь, В.С. Вариант теории пластичности для пропорциональных и непропорциональных циклических нагружений / В.С. Бондарь, И.А. Титарев // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2001. – С. 5–17.
13. Кадашевич, Ю.И. О соотношениях эндохронной теории пластичности с «новой» мерой внутреннего времени при сложном циклическом нагружении / Ю.И. Кадашевич, А.Б.

Мосолов // Технология легких сплавов. – 1990. – № 3. – С. 32–36.

14. *Коротких, Ю.Г.* Моделирование процессов упругопластического деформирования сталей при сложном нагружении / Ю.Г. Коротких, И.А. Волков, И.Ю. Гордлеева // Устойчивость, пластичность, ползучесть при сложном нагружении: сб. науч. трудов, посвященных 70-летию В.Г. Зубчанинова. – Тверь: ТГТУ, 2000. – С. 60–65.

15. *Волков, И.А.* Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями / И.А. Волков, Ю.Г. Коротких. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.

[2.04.2009]

**NUMERICALLY ANALYSING THE PROCESSES OF COMPLEX PLASTIC DEFORMATION OF STRUCTURAL STEELS FOLLOWING THE CLOSED TRAJECTORIES OF NONPROPORTIONAL DEFORMATION UNDER LOW-CYCLE LOADING**

**Yu.G. Korotkikh, I.A. Volkov, I.S. Tarasov, A.N. Borodoy**

To assess the adequacy and to determine the scope of applicability of the theory of plasticity with cinematic and isotropic hardening, complex plastic deformation of a number of structural steels following the closed trajectories of nonproportional loading in low-cycle tests have been studied, and the numerical results obtained have been compared with the data from the full-scale experiments and numerical results obtained elsewhere. The present model is shown to qualitatively and quantitatively describe the main effects of complex plastic deformation of metals with arbitrary nonproportional paths of low-cycle loading.

**Key words:** plasticity, complex deformation, low-cycle loading, deformation path, stressed-strained state.