

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

В.Г. Зубчанинов, В.И. Гульятеев, Д.В. Зубчанинов

Тверской государственной технической университет

Рассмотрено математическое моделирование процессов сложного пластического деформирования по траекториям средней кривизны. В основу модели положена основная нелокальная форма определяющих соотношений теории процессов.

Ключевые слова: пластичность, упругость, процессы, течение, сложное нагружение, деформирование.

1. Математическая модель теории процессов для траекторий малой и средней кривизны

В основу математической модели для описания процессов пластического деформирования упрочняющихся сред при сложном нагружении положена нелокальная форма определяющих процессов [1, 2]

$$d\bar{\sigma} = N_1 d\bar{\varepsilon} + ds (N_\sigma^* \bar{\sigma} + N_\varepsilon^* \bar{\varepsilon}), \quad (1.1)$$

где N_1 , N_σ^* , N_ε^* – функционалы процесса, $\bar{\sigma} = S_k i_k$, $\bar{\varepsilon} = \mathcal{E}_k i_k$ ($k = 1, 2, \dots, 5$) – векторы напряжений и деформаций в линейном координатном евклидовом пространстве E_5 с ортонормированным базисом $\{i_k\}$ А.А. Ильюшина и компонентами S_k , \mathcal{E}_k :

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} (\sigma_{11} - \sigma_0), \quad S_2 = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2} \sigma_{12}, \quad S_4 = \sqrt{2} \sigma_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2} \sigma_{13},$$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_0), \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_3 = \sqrt{2} \varepsilon_{12}, \quad \mathcal{E}_4 = \sqrt{2} \varepsilon_{23}, \quad \mathcal{E}_5 = \sqrt{2} \varepsilon_{13},$$

σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}$$

– средние значения напряжений и деформаций; s – длина дуги траектории деформирования.

Предполагается, что рассматриваемые траектории сложного деформирования являются траекториями малой либо средней кривизны и малого кручения. В этом случае в качестве универсальной функции упрочнения либо прослеживания процесса может быть принята диаграмма Одквиста–Ильюшина $\sigma = \Phi(s)$, мало отличаю-

шаяся от универсальной диаграммы деформирования при простом нагружении Роша и Эйхингера [1]. В качестве аппроксимации таких диаграмм могут быть приняты выражения

$$\sigma = \Phi(s) = \sigma^T + 2G_*\Delta s + \sigma_*(1 - e^{-\beta\Delta s}), \quad (1.2)$$

$$\sigma = \Phi(\mathcal{E}) = \sigma^T + 2G_*\Delta\mathcal{E} + \sigma_*(1 - e^{-\beta\Delta\mathcal{E}}), \quad (1.3)$$

где

$$\Delta s = s - s^T, \quad \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}^T, \quad \sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T,$$

σ_T – предел текучести при растяжении; \mathcal{E}^T, s^T ($\mathcal{E}^T = s^T$) соответствуют пределу текучести по допуску на остаточную деформацию; параметры G_*, σ_*, β подлежат экспериментальному определению при простом нагружении. Для кусочно-аналитической траектории параметры $\sigma^T, G_*, \sigma_*, \beta$ будут изменяться от участка к участку.

Функционалы процесса $N_1, N_\sigma^*, N_\mathcal{E}^*$ определяются из условия процесса простого нагружения. Дифференцируя (1.2) по времени для случая простого растяжения ($s = \mathcal{E}$) и исключая $\exp(-\beta\Delta s)$, получим

$$\dot{\sigma} = \dot{s}\{2G_* - \beta[\sigma - \sigma^T - 2G_*(s - s^T) - \sigma_*]\}. \quad (1.4)$$

Из (1.1) для одноосного растяжения ($s = \mathcal{E}$) имеем

$$\dot{\sigma} = \dot{s}\{N_1 + N_\sigma^*\sigma + N_\mathcal{E}^*\mathcal{E}\}. \quad (1.5)$$

Сравнивая выражения (1.4), (1.5), находим функции процесса:

$$N_1 = 2G_* + \beta\sigma_*, \quad N_\sigma^* = -\beta\left(1 - \frac{\sigma^T}{\sigma}\right), \quad N_\mathcal{E}^* = 2G_*\beta\left(1 - \frac{s^T}{s}\right).$$

Элементарная работа деформирования при формоизменении

$$dA = \bar{\sigma}d\bar{\mathcal{E}} = \sigma ds \cos \vartheta_1,$$

где ϑ_1 – угол сближения, $ds = |d\bar{\mathcal{E}}|$.

Для активных процессов деформирования $dA > 0$, $\vartheta_1 < 90^\circ$, для пассивных – $dA < 0$, $\vartheta_1 > 90^\circ$. При изломе траектории может произойти сложная частичная разгрузка материала ($dA < 0$, $\vartheta_1 > 90^\circ$). В этом случае на диаграмме наблюдается «нырок» напряжений. Минимальное напряжение на «нырке» σ_M^T отвечает окончанию пассивного процесса упругого разгрузки, началу нового активного процесса пластического деформирования ($dA > 0$, $\vartheta_1 < 90^\circ$) и определяется как *вторичный предел текучести* [2]. В процессе деформирования могут иметь место третичные и т.д. пределы текучести.

На этапе частичной разгрузки материала имеет место закон упругой разгрузки:

$$d\bar{\sigma} = 2Gd\bar{\mathcal{E}}, \quad d\sigma = 2Gd\mathcal{E}.$$

Отметим, что вторичный предел текучести σ_M^T существенно зависит от угла излома траектории и определяется из базового опыта по типу веера как некоторая функция

$$\sigma_M^T = F(\theta),$$

где θ – угол излома.

На диаграмме прослеживания процесса $s > \mathcal{E}$ и поэтому на этапе разгрузки может быть использована аппроксимация

$$\sigma = \sigma_K^T + (\sigma_M^T - \sigma_K^T)(1 - e^{-\alpha s})/m,$$

где α – экспериментально подбираемый параметр, $m = 1 - \exp(-\alpha s_M^T)$, σ_K^T – напряжение, отвечающее началу разгрузки.

На этапе вторичного активного пластического деформирования для $\sigma = \Phi(s)$ используется практически та же аппроксимация (1.2), но с измененными параметрами:

$$\sigma = \sigma_M^T + 2G_*\Delta s + \sigma_*^*(1 - e^{-\beta\Delta s}),$$

где $\Delta s = s - s_M^T$, s_M^T соответствует напряжению σ_M^T , σ_*^* учитывает изменение характера нелинейного упрочнения после сложной частичной разгрузки. На всех этапах активного и пассивного деформирования определяющее соотношение сохраняет свой общий вид, но с измененными функционалами процесса $N_1, N_\sigma^*, N_\mathcal{E}^*$. Если сопроводить на каждом этапе постоянные параметры индексом «нолик», то эти функционалы будут иметь вид

$$N_1 = 2G_*^0 + \beta^0 \sigma_*^0, \quad N_\sigma^* = -\beta^0 \left(1 - \frac{\sigma_0^T}{\sigma}\right), \quad N_\mathcal{E}^* = 2\beta^0 G_*^0 \left(1 - \frac{s_0^T}{s}\right).$$

Функция прослеживания процесса $\sigma = \Phi(s)$, хотя и считается близкой к $\sigma = \Phi(\mathcal{E})$, всегда лежит ниже диаграммы простого нагружения. Диаграмма $\sigma = \Phi(s)$ не содержит параметров сложности траектории, ее кривизны и кручения. Чтобы компенсировать этот недостаток, вводится параметр изотропного упрочнения либо разупрочнения материала $C(s)$. Тогда вместо (1.2) получаем аппроксимационную функцию прослеживания процесса

$$\sigma = C(s) + 2G_*^0\Delta s + \sigma_*^0(1 - e^{-\beta^0\Delta s}). \quad (1.6)$$

Основное определяющее соотношение (1.1) в скалярной форме имеет вид

$$dS_k = N_1 d\mathcal{E}_k + ds(N_\sigma^* S_k + N_\mathcal{E}^* \mathcal{E}_k) \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.7)$$

Если t – обобщенное время (им могут быть само время t , длина дуги траектории s , угол вида деформированного состояния Φ и др.), то уравнение (1.6) можно записать в виде

$$\frac{dS_k}{dt} = N_1 \frac{d\mathcal{E}_k}{dt} + \dot{s} \{N_\sigma^* S_k + N_\mathcal{E}^* \mathcal{E}_k\} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1.8)$$

то есть свести задачу к задаче Коши с начальными условиями при $t = t_0$:

$$\mathcal{E}_k \Big|_{t=t_0} = \mathcal{E}_k^*, \quad S_k \Big|_{t=t_0} = S_k^*. \quad (1.9)$$

Для решения системы уравнений (1.8) с начальными условиями (1.9) может быть использован один из численных методов, например, метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности.

В отличие от точных уравнений теории процессов [1] в рассматриваемой приближенной модели процесса пластического деформирования отсутствует система уравнений для углов сближения ϑ_1 и депланации ϑ_2 (либо соприкосания ψ). Это является следствием предположения о том, что закон упрочнения $\sigma = \Phi(s)$ на самом

деле есть одно из параметрических уравнений прослеживания процесса. Углы сближения ϑ_1 и депланации ϑ_2 считаются при этом неопределенно малыми. Тем не менее их можно вычислить из соотношений

$$\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1, \quad \sin \varphi = \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_3,$$

где $\hat{\sigma}$ – единичный вектор напряжений, \hat{p}_n ($n = 1, 2, 3$) – единичные орты репера Френе [1].

2. Математическое моделирование процессов по плоским траекториям

На рис. 1 представлена программа деформирования, по которой производились теоретический расчет и эксперимент на тонкостенном трубчатом образце из стали 45. Упругие свойства образца характеризовались постоянными $E = 2,05 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$, $2G = 1,577 \cdot 10^5$ МПа. Испытания проводилось на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ на сложное нагружение в лаборатории механических испытаний кафедры сопротивления материалов, теории упругости и пластичности Тверского государственного технического университета. Трубчатый образец закручивался до значения $\vartheta_3 = 0,012$, $S_3 = 385$ МПа за предел текучести равный $\sigma^T = 296$ МПа. После излома траектории деформирования на 90° осуществлялось деформирование по окружности радиуса $R = \vartheta = 0,0125$. Было реализовано четыре витка траектории деформирования, после чего деформирование продолжалось по прямолинейному участку, параллельному оси деформаций ϑ_1 . Особенностью программы является то, что на окружности модуль вектора деформации остается постоянным.

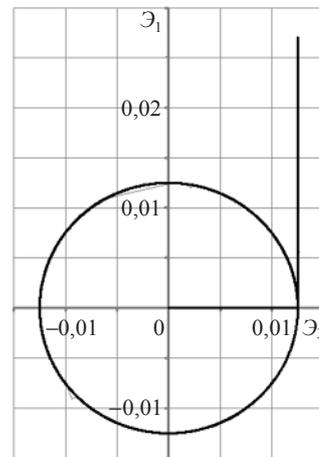


Рис. 1

На рис. 2 и 3 представлены скалярные свойства материала: диаграмма сложного деформирования $\sigma - \vartheta$ и диаграмма прослеживания процесса $\sigma - s$ соответственно. Кривые 1 соответствуют расчету, 2 – эксперименту, 3 – аппроксимации диаграммы прослеживания процесса $\sigma = \Phi(s)$.

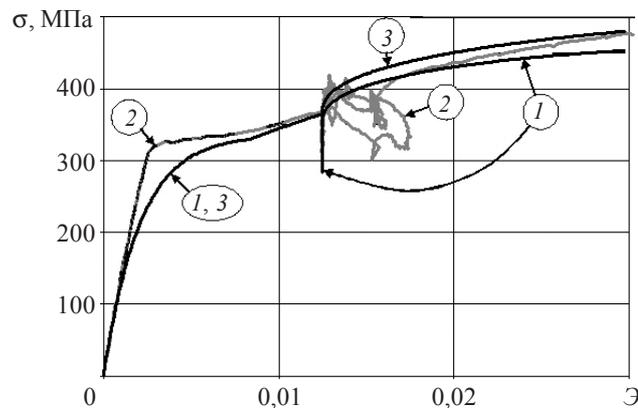


Рис. 2

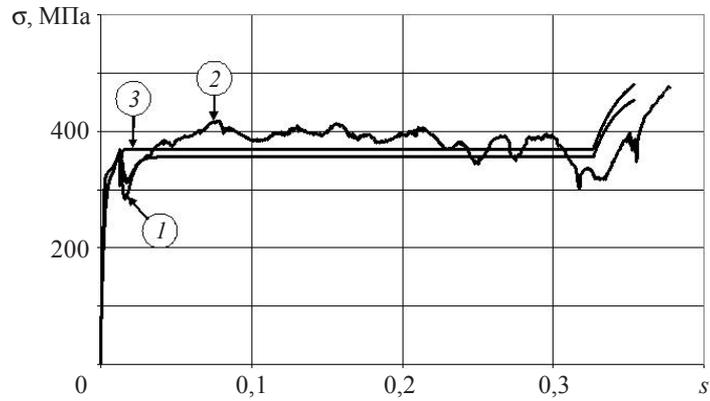


Рис. 3

На рис. 4 показан отклик в пространстве напряжений на реализованную программу сложного деформирования, а на рис. 5 и 6 – локальные диаграммы $S_1 - \mathcal{E}_1$, $S_3 - \mathcal{E}_3$. Векторные свойства материала отражены для угла сближения ϑ_1 на рис. 7. Теоретический расчет предполагает, что материал является циклически стабильным.

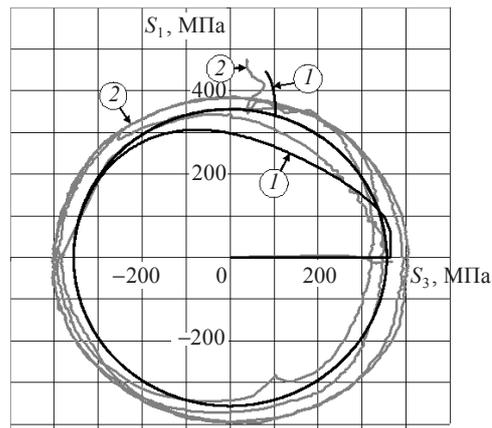


Рис. 4

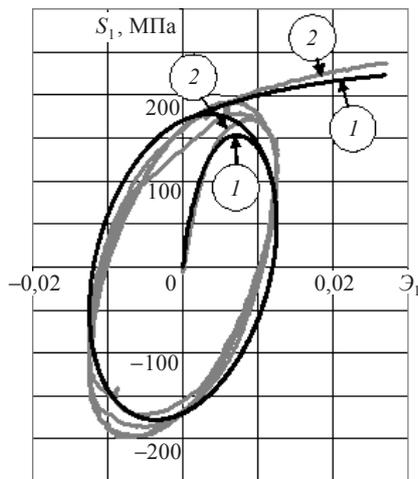


Рис. 5

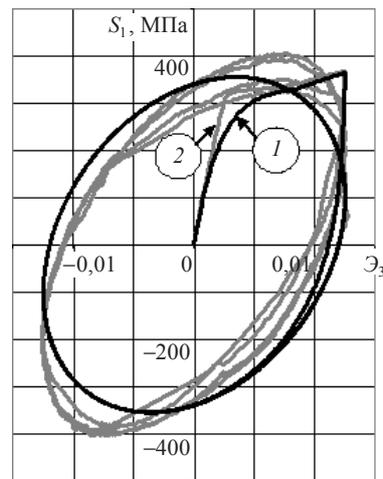


Рис. 6

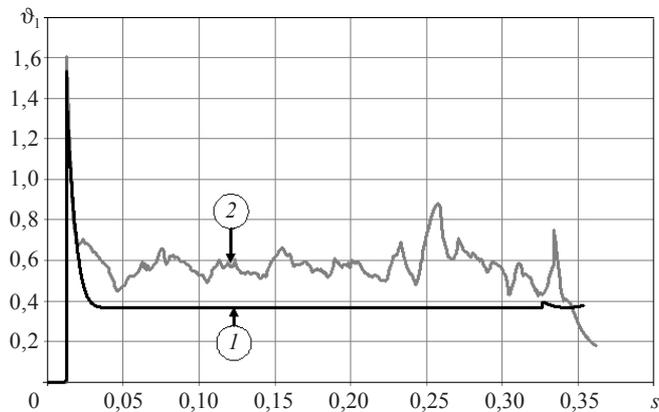


Рис. 7

В целом расчеты и эксперимент удовлетворительно соответствуют друг другу для выбранной сложной программы деформирования материала и показывают, что используемая модель пластического деформирования материала [2] вполне приемлема для инженерных расчетов.

Литература

1. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности / В.Г. Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.
2. Зубчанинов В.Г. Модифицированная теория течения и математические модели процессов и течений пластического деформирования материалов / В.Г. Зубчанинов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2009. – Вып. 71. – С. 5–19.

[5.05.2009]

MATHEMATICALLY MODELING THE PROCESSES OF PLASTIC DEFORMATION FOR TRAJECTORIES OF MODERATE CURVATURE

V.G. Zubchaninov, V.G. Gult'yaev, D.V. Zubchaninov

The processes of complex plastic deformation following the trajectories of moderate curvature are mathematically modeled. The model is based on the main nonlocal form of the constitutive equations of the theory of processes.

Key words: plasticity, elasticity, processes, yield, complex loading, deformation.