УДК 539.3, 539.374

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В.Г. Зубчанинов

Тверской государственный технический университет

Представлены модифицированная теория течения и математические модели теории процессов и течений для траекторий деформирования средней и малой кривизны и кручения, разработанные на основе соотношений теории процессов пластического деформирования.

Ключевые слова: пластичность, упругость, процессы, течение, сложное нагружение, деформирование, ортогональность, градиентальность.

1. Геометрическое представление тензоров и процессов нагружения и деформирования в евклидовом линейном координатном пространстве

При пластическом деформировании законы связи между тензорами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} зависят не только от самих тензоров, но и от процессов нагружения и деформирования. В связи с этим существенное значение в теории пластичности имеет геометрическое представление процессов нагружения и деформирования. Изменение напряженного и деформированного состояний в частице тела с координатами x_k $(k = 1, 2, 3)$, характеризуемое непрерывными функциями

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_k, t, T, \beta), \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_k, t, T, \beta) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

при определенном изменении температуры T и других нетермомеханических параметров, называют процессом нагружения либо деформирования соответственно. В общем случае в каждой частице тела эти функции различны.

Множество элементов, в том числе таких, как тензоры, называют в линейной алгебре линейным пространством, если для них определены операции сложения и умножения на скаляр [1–4]. Множество элементов $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k ..., x_n)$, каждый из которых состоит из упорядоченной совокупности n вещественных чисел x_k $(k = 1, 2, ..., n)$, называемых координатами элемента, носит название линейного координатного пространства, если для них также определены операции сложения и умножения на скаляр. Элементы любой природы произвольного линейного пространства принято называть векторами, а их множества – векторными n-мерными пространствами. Линейное пространство является евклидовым пространством, если для векторов введено правило скалярного произведения [2].

Симметричные тензоры 2-го ранга напряжений (σ_{ij}) и деформаций (ε_{ij}) могут быть представлены в шестимерном координатном линейном евклидовом пространстве R_n в виде векторов

$$\bar{S} = X_n \hat{\varepsilon}_n; \quad \bar{\varepsilon} = Y_n \hat{\varepsilon}_n, \quad (n = 1, 2, ..., 6), \tag{1.2}$$

где

$$X_1 = \sigma_{11},\ X_2 = \sigma_{22},\ X_3 = \sigma_{33},\ X_4 = \sqrt{2}\sigma_{12},\ X_5 = \sqrt{2}\sigma_{23},\ X_6 = \sqrt{2}\sigma_{13},$$

$$Y_1 = \varepsilon_{11},\ Y_2 = \varepsilon_{22},\ Y_3 = \varepsilon_{33},\ Y_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{12},\ Y_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{23},\ Y_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{13} \tag{1.3}$$

– координаты (проекции) векторов;

$$\hat{\varepsilon}_1 = (1,0,0,...,0), \quad \hat{\varepsilon}_2 = (0,1,0,...,0), ..., \hat{\varepsilon}_n = (0,0,0,..., 1) \tag{1.4}$$

– ортонормированный координатный базис Прагера в совмещенном линейном пространстве напряжений Σ_6 и деформаций E_6;

$$S = |\bar{S}| = \sqrt{X_n X_n} = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}, \tag{1.5}$$

$$\varepsilon = |\bar{\varepsilon}| = \sqrt{Y_n Y_n} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \quad (i, j = 1, ,2, 3) \tag{1.6}$$

– модули векторов и тензоров соответственно.

Первоначально Прагер ввел в рассмотрение линейные девятимерные координатные пространства напряжений и деформаций для несимметричных тензоров (σ_{ij}) и (ε_{ij}) [1] . Однако эти пространства не являлись евклидовыми. А.А. Ильюшин ввел другой ортонормированный базис [2, 3]

$$\begin{gathered}
\hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3), \\
\hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}[\cos\beta_0\hat{\varepsilon}_1 - \sin(\beta_0 + \pi/6)\hat{\varepsilon}_2 + \sin(\beta_0 - \pi/6)\hat{\varepsilon}_3], \\
\hat{i}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}[\sin\beta_0\hat{\varepsilon}_1 + \cos(\beta_0 + \pi/6)\hat{\varepsilon}_3 - \cos(\beta_0 - \pi/6)\hat{\varepsilon}_3], \\
\hat{i}_3 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_4,\ \hat{i}_4 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_5,\ \hat{i}_5 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_6,
\end{gathered} \tag{1.7}$$

где β_0 – произвольный угол на девиаторной плоскости. Для практических расчетов наиболее удобным из базисов (1.7) является базис при $\beta_0 = 0$, то есть

$$\begin{gathered}
\hat{i}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3), \quad \hat{i}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[\hat{\varepsilon}_1 - \frac{1}{2}(\hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3)\right], \\
\hat{i}_2 = \frac{\hat{\varepsilon}_2 - \hat{\varepsilon}_3}{\sqrt{2}}, \quad \hat{i}_3 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_4, \quad \hat{i}_4 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_5, \quad \hat{i}_5 = \sqrt{2}\hat{\varepsilon}_6.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

В этом базисе векторы (1.5), (1,6) принимают вид

$$\bar{S} = S_k \hat{i}_k; \quad \bar{\varepsilon} = Э_k \hat{i}_k \quad (k = 0, 1, 2, ..., 5), \tag{1.9}$$

где

$$S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, \quad S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, S_2 = \sqrt{2}\left(S_{22} + \frac{1}{2}S_{11}\right), \quad S_3 = \sqrt{2}S_{12},$$

$$S_4 = \sqrt{2} S_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2} S_{13}, \quad Э_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, \quad Э_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} Э_{11},$$

$$Э_2 = \sqrt{2}(Э_{22} + \frac{1}{2} Э_{11}), \quad Э_3 = \sqrt{2} Э_{12}, \quad Э_4 = \sqrt{2} Э_{23}, \quad Э_5 = \sqrt{2} Э_{13} \qquad (1.10)$$

– координаты (проекции) векторов;

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \qquad (1.11)$$

– средние напряжения и деформации, δ_{ij} – символ Кронекера;

$$Э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0 \qquad (1.12)$$

– компоненты векторов-девиаторов напряжений и деформаций соответственно.

Линейные пространства векторов в форме (1.9), (1.10) удобно разложить на два подпространства (два множества): одномерные подпространства Σ_0 и E_0 всестороннего растяжения-сжатия и пятимерные подпространства Σ_5 и E_5 формоизменения, представив их в виде

$$\overline{S} = \overline{S}_0 + \overline{\sigma}, \quad Э = \overline{Э}_0 + \overline{Э}, \qquad (1.13)$$

где

$$\overline{S}_0 = S_0 \hat{i}_0, \quad \overline{Э}_0 = Э_0 \hat{i}_0, \quad \overline{\sigma} = S_k \hat{i}_k, \quad \overline{Э} = Э_k \hat{i}_k m \quad (k = 1, 2, ..., 5). \qquad (1.14)$$

Векторы $\overline{\sigma}$ и $\overline{Э}$ соответствуют в Σ_5 и E_5 тензорам-девиаторам напряжений S_{ij} и деформаций $Э_{ij}$ соответственно. Учитывая сдвиговый характер пластического деформирования и упругий характер объемного расширения-сжатия разложения (1.13), (1.14) являются вполне естественными и в теории процессов, и в теории течения. Концы векторов $\overline{\sigma}(t)$, $\overline{Э}(t)$ описывают в пятимерных пространствах Σ_5, E_5 при базисе $\{\hat{i}_k\}$ траектории деформирования и нагружения. Траектория деформирования с построенными в каждой ее точке, характеризуемой длиной дуги $s(t)$, векторами $\overline{\sigma}, d\overline{\sigma}$ и приписанными к ней температурой T, средней деформацией ε_0 и другими нетермофизическими параметрами β создают образ процесса деформирования в E_5. Аналогично вводится понятие образа процесса нагружения в Σ_5. Эти образы процессов дополняются предельными поверхностями деформирования и нагружения в каждой точке траекторий соответственно [1–4].

Если объемная деформация неупруга, то процессы рассматриваются в $\Sigma_6 = \Sigma_0 + \Sigma_5$, $E_6 = E_0 + E_5$. Траектории деформирования $\overline{Э}(t)$ в E_6 при базисе $\{\hat{i}_k\}$ с построенными в каждой точке s векторами и приписанными к ним параметрами T, β создают образ процесса деформирования. Аналогично вводится понятие образа процесса нагружения в Σ_6. Каждой траектории и образу процесса в целом в Σ_6, E_6 либо Σ_5, E_5 соответствуют различные физические процессы. При этом ортогональные преобразования траекторий путем их вращения и отражения сохраняют модули векторов, но не сохраняют инварианты σ_0, ε_0 и углы вида деформированного φ и напряженного ψ состояний, определяемые равенствами

$$\cos 3\varphi = 3\sqrt{6}\,|Э^*_{ij}|, \quad \cos 3\psi = 3\sqrt{6}\,|S^*_{ij}|, \qquad (1.16)$$

где $Э^*_{ij} = Э_{ij} / Э$, $S^*_{ij} = S_{ij} / \sigma$ – компоненты направляющих тензоров-девиаторов. Исключение представляет частный случай этих преобразований – поворот системы координатных осей x_k ($k = 1, 2, 3$) в теле.

Таким образом, линейное координатное пространство размерности $n > 3$ для начально изотропного тела оказывается неизотропным относительно ортогональных преобразований вращения и отражения траекторий. Оно успешно используется как в теории процессов, так и в теории течения для геметрического представления тензоров и процессов пластического деформирования.

2. Постулат изотропии, гипотеза ортогональности и принцип градиентальности в теории процессов

В основе математической теории пластичности лежит основной постулат механики сплошных сред – постулат макроскопической определимости [3, 4], согласно которому макроскопическое термомеханическое состояние среды в момент времени t полностью определяется процессом деформирования либо нагружения в каждой материальной частице среды в физическом пространстве при декартовом неподвижном репере $\{\hat{e}_k\}$, $k = 1, 2, 3$. Следовательно, закон связи между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} является локально устойчивым, то есть не зависит от процессов в соседних частицах среды. Поэтому для некоторого макрообъема среды, называемого M-образцом (макрообразцом), можно создать однород–ное напряженно-деформированное состояние и температурное поле T, полностью адекватное физическому состоянию в данной частице тела $x = x_i\hat{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Из постулата макроскопической определимости вытекает, что возникающий в процессе деформирования тензор напряжений $\sigma_{ij}(t)$ либо, что все равно, среднее напряжение $\sigma_0(t)$ и девиатор напряжений $S_{ij}(t)$ являются вполне определенными однозначными функциями процесса, то есть функционалами, зависящими от $\varepsilon_{ij}(t)$, $T(t)$, $\beta(t)$ либо $\varepsilon_0(t)$, $Э_{ij}(t)$, $T(t)$, $\beta(t)$. Следовательно,

$$\sigma_{ij} = F\{\varepsilon_{ij}, T, \beta\}_t \tag{2.1}$$

либо

$$\sigma_0 = F_0\{\varepsilon_0, Э_{ij}, T, \beta\}_t, \quad S_{ij} = \Phi_{ij}\{\varepsilon_0, Э_{ij}, T, \beta\}_t. \tag{2.2}$$

В работе [3] соотношения (2.1) и (2.2) названы А.А. Ильюшиным общим постулатом изотропии для начально изотропных сред. Эти соотношения остаются инвариантными относительно ортогональных преобразований поворота (вращения) начальных декартовых координатных осей x_k ($k = 1, 2, 3$), чтобы правильно отображать физические свойства начально-изотропной среды.

В теории процессов А.А. Ильюшин ввел еще один ортонормированный базис $\{\hat{p}_k\}$ в линейных координатных евклидовых пространствах E_6 и E_5. Этот базис обобщает известный из дифференциальной геометрии базис Френе для кривых линий в трехмерном пространстве при ортонормированном неподвижном координатном базисе $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Учитывая сдвиговый характер пластического деформирования, рассмотрим пространство E_5. Внутренняя геометрия траекторий в E_5 определяется движением ортонормированного базиса Ильюшина–Френе $\{\hat{p}_k\}$

$$\begin{gathered}\hat{p}_1 = \frac{d\bar{Э}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1}\frac{d^2\bar{Э}}{ds^2}, \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{\kappa_2}\left[\kappa_1\frac{d\bar{Э}}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\bar{Э}}{ds^2}\right)\right], \\ \hat{p}_4 = \frac{1}{\kappa_3}\left[\kappa_2\hat{p}_2 + \frac{d\hat{p}_3}{ds}\right], \quad \hat{p}_5 = \frac{1}{\kappa_4}\left[\kappa_3\hat{p}_3 + \frac{d\hat{p}_4}{ds}\right],\end{gathered} \tag{2.3}$$

где κ_m ($m = 1, 2, 3, 4$) – четыре параметра кривизны и кручения траекторий ($\kappa_0 = 0$,

$\varkappa_5 = 0$), s – длина дуги траектории деформирования.

Введение подвижного базиса $\{\hat{p}_k\}$ в линейном координатном пространстве с $n > 3$ было прорывом в математической теории пластичности и теории процессов, что является безусловной заслугой А.А. Ильюшина. В работах [3, 4] он предложил вектор $\overline{\sigma}$ разложить в каждой текущей точке траектории в базисе $\{\hat{p}_k\}$:

$$\overline{\sigma} = P_k p_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) с учетом (2.3) можно представить также в косоугольном репере $d\overline{Э}^k / ds^k$ [3]:

$$\overline{\sigma} = A_k \frac{d^k \overline{Э}}{ds^k} \quad (k = 1, 2, ..., 5). \tag{2.5}$$

Обращаясь к общему постулату изотропии (2.1), (2.2), А.А. Ильюшин предложил записать его в упрощенном, но в то же время достаточно сложном виде (2.4) либо (2.5), где коэффициенты P_k, A_k должны быть функционалами процесса, зависящими от всех трех инвариантов ε_0, Э, φ тензора деформаций, а также параметров кривизны и кручения $\varkappa_m$ (m = 1, 2, 3, 4), температуры T и других нетермофизических параметров β как функций параметра прослеживания процесса $s(t)$. Другими словами, необходимо было наполнить коэффициенты разложения P_k, A_k в (2.4), (2.5) физическим содержанием.

Ясно, что в репере $\{\hat{p}_k\}$ можно разложить любой другой физический вектор, например,

$$\frac{d\overline{\sigma}}{ds} = P_k^* \hat{p}_k, \quad \overline{Э} = Q_k \hat{p}_k. \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.4), (2.6) можно получить локальную и нелокальную формы определяющих соотношений теории процессов пластического деформирования

$$\begin{gathered} \frac{d\overline{\sigma}}{ds} = M_k \hat{p}_k + M\hat{\sigma}, \quad (k = 1, 2, ..., 5), \\ \frac{d\overline{\sigma}}{ds} = N_r \hat{p}_r + N_\sigma \hat{\sigma} + N_Э \hat{Э}, \quad (r = 1, 4, 5), \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $M_k, M, N_r, N_\sigma, N_Э$ – функционалы процесса деформирования, зависящие от ε_0, Э, φ, $\varkappa_m$, T, β по параметру прослеживания $s(t)$ [1].

Из постулата физической определенности следует, что параметры кривизны и кручения $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ – несущественны [1]. Вследствии этого функционалы $M_4 = M_5 = 0$, $N_4 = N_5 = 0$. К этому же результату приводит гипотеза ортогональности полного вектора напряжений $\overline{\sigma}$ к предельным поверхностям нагружения $f(\overline{\sigma})$ и деформирования $F(\overline{\sigma})$ [1, 2, 5]:

$$\overline{\sigma} = \operatorname{grad} F(\overline{Э}), \quad \overline{\sigma} = \operatorname{grad} f(\overline{\sigma}). \tag{2.8}$$

Итак, в теории процессов согласно (2.7) используем определяющие соотношения двух видов. Локальная форма в развернутом виде имеет вид [1, 2]

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{\sigma}}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + M\hat{\sigma} + M_3 \hat{p}_3, \\ M = \dfrac{d\overline{\sigma}}{ds} - M_1 \cos\vartheta_1 - M_3 \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2, \quad P = \dfrac{d\sigma}{ds}\dfrac{1}{\cos\vartheta_1}, \\ \dfrac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 \cos\vartheta_2 = \dfrac{1}{\sigma}\left[- M_1 \sin\vartheta_1 + M_3 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2\right], \\ \sin\vartheta_1 \left(\dfrac{d\vartheta_2}{ds} + \kappa_2\right) = \kappa_1 \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \dfrac{M_3}{\sigma}\cos\vartheta_2, \end{cases} \tag{2.9}$$

где ϑ_1, ϑ_2 – углы сближения и депланации вектора $\overline{\sigma}$ в репере $\{\hat{p}_k\}$, то есть

$$\hat{\sigma} = \cos\vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin\vartheta_1 (\cos\vartheta_2 \hat{p}_2 + \sin\vartheta_2 \hat{p}_3).$$

Нелокальная форма определяющих соотношений имеет вид [2]

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{\sigma}}{ds} = N_1 \hat{p}_1 + N_\sigma \hat{\sigma} + N_Э \hat{Э}, \\ N_\sigma = \dfrac{d\sigma}{ds} - N_1 \cos\vartheta_1 - N_Э \cos\alpha, \end{cases} \tag{2.10}$$

где $\cos\alpha = \hat{\sigma}\cdot\hat{Э}$, α – угол расхождения, N_1, N_3 – связаны с M_1, M_3 [1].

Нелокальная форма (2.10) использована нами для построения модифицированной теории течения. Введем в рассмотрение вектор

$$d\overline{Э}^* = d\overline{Э} - \frac{1}{N_1} d\overline{\sigma} + dsN_Э \hat{Э}. \tag{2.11}$$

С учетом (2.8), (2.10) из (2.11) следует соотношение

$$d\overline{Э}^* = D\mathrm{grad}\, f(\overline{\sigma}), \tag{2.12}$$

где $D = -dsN_\sigma^*$ – функционал процесса, $N_\sigma^* = N_\sigma / \sigma$, $N_Э^* = N_Э / Э$.

Соотношение (2.12) в теории процессов называется принципом градиентальности. В частном случае при $N_1 = 2G$, $N_Э^* = 0$ из (2.12) следует соотношение принципа градиентальности в теории течения:

$$d\overline{Э}^p = d\lambda\, \mathrm{grad}\, f(\overline{\sigma}). \tag{2.13}$$

Соотношения (2.12), (2.13) показывают, что теория процессов и течения имеют общую основу. По существу теория течения является конкретизированным вариантом теории процессов. В теории процессов вместо предельных поверхностей используются диаграммы сложного деформирования. И те, и другие отражают скалярные свойства материалов.

3. Модифицированная теория пластического течения

Данная теория предложена автором в развитие общей современной теории течения [1, 2]. В ее основе лежат две гипотезы. Первая – основная гипотеза теории течения о возможности разложения полных деформаций на упругие и пластические составляющие. Вторая – *гипотеза ортогональности* полного вектора напряжений $\overline{\sigma}$ к предельной поверхности $f(\overline{\sigma})$ [1, 5], то есть

$$\overline{\sigma} = \mathrm{grad}\, f(\overline{\sigma}). \tag{3.1}$$

В теориях течения с изотропно-трансляционным упрочнением утверждается, что ортогональным к предельной поверхности является вектор активных напряжений [6, 7]:

$$\overline{\sigma}^0 = \operatorname{grad} f(\overline{\sigma}). \tag{3.2}$$

При этом согласно модели Прагера поверхность текучести обладает только поступательным перемещением, в то время как в теории процессов эта поверхность может поворачиваться [5].

В линейном координатном совмещенном евклидовом пространстве E_5 с базисом $\{\hat{i}_k\}$ А.А. Ильюшина векторы напряжений и деформаций имеют вид

$$\overline{\sigma} = S_k \hat{i}_k; \quad \overline{Э} = Э_k \hat{i}_k \quad (k = 1, 2, ..., 5), \tag{3.3}$$

где S_k, $Э_k$ – их компоненты [1–4]. В E_5 – подпространстве деформаций имеет место нелокальная форма определяющего соотношения теории процессов:

$$d\overline{\sigma} = N_1 d\overline{Э} + ds[N_\sigma^* \overline{\sigma} + N_Э^* \overline{Э}], \tag{3.4}$$

где N_1, N_σ^*, $N_Э^*$ – функционалы процессов деформирования, s – длина дуги траектории деформирования, $N_\sigma^* = N_\sigma / \sigma$, $N_Э^* = N_Э / Э$.

В Σ_5 – подпространстве напряжений имеет место соотношение

$$N_1 d\overline{Э} = d\overline{\sigma} - d\Sigma[M_\sigma^* \overline{\sigma} + M_Э^* \overline{Э}], \tag{3.5}$$

где N_1, M_σ^*, $M_Э^*$ – функционалы процесса нагружения, Σ – длина дуги траектории нагружения в Σ_5,

$$ds N_\sigma^* = d\Sigma M_\sigma^*, \quad ds N_Э^* = d\Sigma M_Э^*. \tag{3.6}$$

Согласно первой гипотезе вектор полной деформации $\overline{Э}$ можно разложить на упругую $\overline{Э}^e$ и пластическую $\overline{Э}^p$ части:

$$\overline{Э} = \overline{Э}^e + \overline{Э}^p, \quad d\overline{Э} = d\overline{Э}^e + d\overline{Э}^p, \quad \overline{Э}^e = \frac{\overline{\sigma}}{2G}. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в (3.4), получим

$$\left(1 - \frac{N_1}{2G}\right) d\overline{\sigma} = N_1 d\overline{Э}^p + ds[N_\sigma^* \overline{\sigma} + N_Э^* \overline{Э}^p], \tag{3.8}$$

где

$$N^* = N_\sigma^* + \frac{1}{2G} N_Э^*, \quad b = 1 - \frac{N_1}{2G}. \tag{3.9}$$

В теориях течения принимается

$$N_1 = 2G, \quad b = 0, \quad d\overline{Э}^e = \frac{d\overline{\sigma}}{2G}. \tag{3.10}$$

Из (3.8) с учетом (3.9), (3.10) следует

$$d\overline{Э}^p = -\frac{ds}{2G}[N_\sigma^* \overline{\sigma} + N_Э^* \overline{Э}^p].$$

При практических расчетах предел текучести σ^T и положение начальной предельной поверхности определяется по допуску на остаточную деформацию $Э_p^T$, поэтому этот предел по существу является «функцией точности измерительных приборов». Еще до достижения принятого по допуску предела текучести σ^T диаграмма деформирования начинает отклоняться от пропорциональной зависимости. При достижении σ^T касательная к кривой диаграммы деформирования имеет наклон, тангенс угла которого меньше удвоенного упругого модуля упругости $2G$. Поэтому утверждения в ряде источников о том, что в теории пластического течения метод обработки экспериментальных данных по определению материальных функций не связан с определением пределов текучести и других величин по допускам на деформацию, совершенно неверны. С учетом этого при построении модифицированной теории течения нами принято $N_1 = 2G$, $b \neq 0$. В соответствии с отмеченным из (3.8) получаем основное определяющее соотношение модифицированной теории течения:

$$d\overline{\sigma} = N_1^p d\overline{Э}^p + ds[N_\sigma^p \overline{\sigma} + N_Э^p \overline{Э}^p], \tag{3.11}$$

где

$$N_1^p = \frac{N_1}{b} = g_1, \quad N_\sigma^p = \frac{N_\sigma^*}{b} = g_\sigma, \quad N_Э^p = \frac{N_Э^*}{b} = g_Э \tag{3.12}$$

и введены новые обозначения функционалов $g_1, g_\sigma, g_Э$. Соотношение (3.11) сохраняет в себе полный вектор $\overline{\sigma}$. Для $d\overline{Э}^p$ из (3.11) имеем

$$d\overline{Э}^p = \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{2G}\right)\{d\overline{\sigma} - ds[N_\sigma^p \overline{\sigma} + N_Э^p \overline{Э}^p]\}. \tag{3.13}$$

Полную деформацию найдем после сложения соотношений (3.10) и (3.13):

$$d\overline{Э} = \frac{d\overline{\sigma}}{N_1} - ds\left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{2G}\right)[N_\sigma^p \overline{\sigma} + N_Э^p \overline{Э}^p]. \tag{3.14}$$

Таким образом, в модифицированной теории нет необходимости разлагать полное напряжение $\overline{\sigma}$ на вектор активных $\overline{\sigma}_0$ и дополнительных микронапряжений $\overline{a}$.

4. Математическая модель теории процессов

Основу математической модели описания процессов пластического деформирования материалов и сплошных сред при сложном нагружении составляет нелокальная форма (3.4) определяющих соотношений теории процессов [1, 2]. Функционалы процесса деформирования в общем случае зависят от длины дуги $s(t)$ как параметра прослеживания процесса, параметров кривизны и кручения k_1, k_2, температуры T, нетермофизических параметров β, то есть

$$N_1, N_\sigma^*, N_Э^* = N\{\varepsilon_0, Э, \varphi, k_1, k_2, T, \beta\}, \tag{4.1}$$

где $3\varepsilon_0 = \delta_{ij}\varepsilon_{ij}$, $Э = |\overline{Э}|$, φ – угол вида деформированного состояния формоизменения [1–4].

При простом нагружении зависимости (4.1) существенно упрощаются. Модули векторов напряжений σ и деформаций $Э$ связаны универсальной зависимостью Роша и Эйхингера:

$$\sigma = \Phi(Э), \tag{4.2}$$

частным случаем которой является зависимость

$$\sigma = \Phi(Э) = \begin{cases} \dfrac{2G}{\alpha}(1 - e^{-\alpha Э}), \quad 0 \le Э \le Э^T, \\ \sigma^T + 2G_* \Delta Э + \sigma_*(1 - e^{-\beta \Delta Э}), \quad Э^T \le Э, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\Delta Э = Э - Э^T$, $Э^T$ – деформация, соответствующая условному пределу текучести σ^T, G – упругий модуль сдвига, α, σ_*, G_*, β – экспериментально определяемые параметры материала. Предел текучести σ^T определяется по допуску на остаточную деформацию $Э_p^T$ и поэтому упругий участок аппроксимируется непропорциональной зависимостью.

В теории процессов для траекторий деформирования средней кривизны и малого кручения диаграмму прослеживания процесса

$$\sigma = \Phi(s) \tag{4.4}$$

предлагается использовать в качестве закона упрочнения при сложном деформировании (закон Одквиста–Ильюшина). Для функции (4.4) можно принять выражение

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \dfrac{2G}{\alpha}(1 - e^{-\alpha s}), \quad 0 \le s \le s^T, \\ \sigma^T + 2G_* \Delta s + \sigma_*(1 - e^{-\beta \Delta s}), \quad s^T \le s, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $\Delta s = s - s^T$, $s^T = Э^T$, s – длина дуги траектории деформирования ($s > Э$).

Диаграмма прослеживания процесса (4.5), вообще говоря, не является законом упрочнения при сложном нагружении. Таковым может быть лишь совокупность его параметрических соотношений $\sigma = \Phi(s)$, $Э = Э(s)$. Соотношение (4.5), как и (4.3), не содержит параметров сложного деформирования – кривизны k_1 и кручения k_2 траектории, углов ее излома. Тем не менее закон (4.5) можно использовать для построения простейших приближенных моделей сложного процесса деформирования в случае кусочно-аналитических траекторий средней кривизны и малого кручения с учетом их излома.

Аппроксимационная диаграмма $\sigma = \Phi(s)$ в силу $s > Э$ всегда лежит ниже диаграммы $\sigma = \Phi(Э)$. Кроме того сами диаграммы $\sigma = \Phi(s)$ могут принадлежать различным видам траекторий. Чтобы учесть эти факторы, предлагается принять выражение для диаграммы прослеживания аналитического участка траектории в виде

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{2G}{\alpha}(1 - e^{-\alpha s}), \quad 0 \le s \le s^T, \\ C(s) + 2G_* \Delta s + \sigma_*(1 - e^{-\beta \Delta s}), \quad s^T \le s, \end{cases} \tag{4.6}$$

где $C(s)$ – функция, учитывающая отклонение не только по s, но и в зависимости от класса траектории, $\Delta s = s - s^T$ – приращение длины дуги траектории.

Функционалы процесса N_1, N_σ^*, $N_Э^*$ в теориях течения определяют из опытов на простое растяжение. Для простого нагружения ($s = Э$) из (3.4) имеем:

$$\dot{\sigma} = \dot{s}[N_1 + N_\sigma^* \sigma + N_Э^* s], \tag{4.8}$$

где точка сверху означает дифференцирование по времени t.

Дифференцируя (4.6) по времени при условии $s = Э$, то есть для простого нагружения, и исключая $\exp(-\beta \Delta s)$, получим:

$$\dot{\sigma} = \dot{s}(2G_* - \beta(\sigma - \sigma^T - 2G_*(s - s^T) - \sigma_*)). \tag{4.9}$$

Сравнивая (4.8) и (4.9), находим функции процесса:

$$N_1 = 2G_* + \beta\sigma_*, \quad N_\sigma^* = -\beta\left(1 - \frac{\sigma^T}{\sigma}\right), \quad N_Э = 2G_*\beta\left(1 - \frac{s^T}{s}\right), \tag{4.10}$$

где $s = Э$. Полученные выражения (4.10) приближенно распространяем и на траектории средней кривизны и малого кручения.

После излома траектории на диаграмме деформирования возникает «нырок» напряжений. На ниспадающей ветви «нырка» происходит частичная упругая разгрузка материала от напряжения σ_K^T. Минимум на «нырке» напряжений отвечает окончанию пассивного процесса частичного разгружения и началу нового, вторичного этапа активного пластического деформирования, для которого $dA > 0$. Минимальное напряжение на «нырке» σ_M^T названо нами вторичным пределом текучести. На участке частичной разгрузки имеет место закон частичной упругой разгрузки. С учетом нелинейности на этом участке в соотношении (3.4) следует принять

$$N_1 = 2G + 2\widetilde{G}, \quad N_\sigma = \alpha\left(1 - \frac{\sigma_k^T}{\sigma}\right), \quad N_Э = 0. \tag{4.11}$$

Вторичный предел текучести σ_M^T существенно зависит от угла излома траектории Θ и подлежит экспериментальному определению. На этапе вторичного пластического деформирования диаграмма прослеживания процесса $\sigma = \Phi(s)$ описывается теми же соотношениями (4.6), (4.7), но с новыми экспериментально определяемыми параметрами $\alpha, \beta, \sigma_*, G_*, \sigma_M^T$ и функцией $C(s)$. После определения функций N_1, N_σ^*, $N_Э^*$ на всех кусочно аналитических участках заданной траектории деформирования решается система уравнений (3.4). В развернутой скалярной форме она имеет вид

$$\frac{dS_k}{ds} = N_1\frac{dЭ_k}{ds} + N_\sigma^* S_k + N_Э^* Э_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{4.12}$$

Если t – обобщенное время (само время t, длина дуги s, угол φ и др.), то уравнение (4.12) можно представить как

$$\frac{dS_k}{dt} = N_1\frac{dЭ_k}{dt} + \dot{s}(N_\sigma^* S_k + N_Э^* Э_k) \quad (k = 1, 2, 3), \tag{4.13}$$

то есть свести решение системы дифференциальных уравнений к задаче Коши с начальными условиями

$$S_k = S_k^0, \quad Э_k = Э_k^0 \text{ при } t = t_0. \tag{4.14}$$

Для решения системы (4.13) при начальных условиях (4.14) может быть использован один из численных методов, например метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности.

В рассматриваемой постановке задачи, в отличие от точной постановки в общей теории процессов [1–3], отсутствует система уравнений для углов сближения ϑ_1 и депланации ϑ_2, которые характеризуют векторные свойства среды. Это является следствием предположения о том, что принятый закон упрочнения $\sigma = \Phi(s)$ не оговаривает конкретно ограничения на указанные углы, которые считаются малыми. Тем не менее, они могут быть вычислены. После решения системы уравнений (4.13) и определения компонент вектора напряжений S_k для заданной траектории полярные углы сближения ϑ_1 и депланации ϑ_2 можно найти по формулам

$$\cos\vartheta_1 = \hat{\sigma}\cdot\hat{p}_1, \quad \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 = \hat{\sigma}\cdot\hat{p}_3,$$

где $\hat{\sigma} = \overline{\sigma}/\sigma$ – единичный вектор напряжений, $\hat{p}_k$ (k = 1, 2, 3) – единичные орты репера Френе [1].

В рамках принятого подхода, не представляет большого труда получить функции процесса для модифицированной теории течения. Согласно (3.11), (3.12), (4.10) находим:

$$g_1 = \frac{1}{b}\left[2G_* + \beta\sigma_*\right], \quad g_\sigma = \frac{-\beta}{2Gb}\left\{2G\left(1 - \frac{\sigma^T}{\sigma}\right) - 2G_*\left(1 - \frac{s^T}{s}\right)\right\},$$
$$g_Э = 2G_*\frac{\beta}{b}\left(1 - \frac{s^T}{s}\right), \quad b = 1 - \frac{1}{2G}\{2G_* + \beta\sigma_*\}. \tag{4.15}$$

При развитых пластических деформациях, когда $s \approx s^p$, $\dot{s} \approx \dot{s}^p$, имеем:

$$g_1 = N_1 = 2G_* + \beta\sigma_*, \quad g_\sigma = N_\sigma^* = -\beta\left(1 - \frac{\sigma^T}{\sigma}\right), \quad g_Э = N_Э^* = 2G_*\beta. \tag{4.16}$$

5. Математическая модель теории течения

Прагером [5] предложена следующая модель поведения упрочняющегося материала с отчетливо выраженным эффектом Баушингера в пространстве напряжений. Двигаясь по траектории нагружения, конец вектора напряжений $\overline{\sigma}$ сначала выходит на начальную предельную поверхность в некоторой точке K_0. Если условно считать эту точку жестким шариком, а поверхность нагружения моделировать жесткой оболочкой, то при дальнейшем нагружении шарик начинает двигать оболочку давлением σ^0, ортогональным к предельной поверхности. Предполагается, что оболочка будет двигаться поступательно, то есть без поворотов, а вектор давления $\overline{\sigma}^0$ будет направлен по нормали к поверхности оболочки в точке K ее пересечения с траекторией нагружения. При разгрузке от точки K внутрь поверхности оболочки материал ведет себя упруго вплоть до некоторой точки C, в которой данное продолжение траектории K «проткнет» оболочку изнутри. В этот момент материал начинает вновь течь до того момента, когда напряжения будут полностью сняты. Таким образом, согласно модели кинематического или трансляционного упрочнения материала Прагера активный вектор давления $\overline{\sigma}^0$ не только ортогонален предельной поверхности, но и сохраняет в процессе деформирования постоянное направление, что весьма существенно. По существу такая модель принята и в теории течения с трансляционным упрочнением Кадашевича–Новожилова [6].

В теории течения трансляционного типа полные деформации разлагаются на упругие и пластические части:

$$\overline{Э} = \overline{Э}^e + \overline{Э}^p, \tag{5.1}$$

причем упругие части подчиняются закону Гука

$$\overline{Э}^e = \overline{\sigma}/2G, \quad d\overline{Э}^e = d\overline{\sigma}/2G, \tag{5.2}$$

а приращение пластических деформаций определяется на основе принципа градиентальности или, иначе, ассоциированного с поверхностью нагружения закона течения

$$d\overline{Э}^p = d\lambda\, \mathrm{grad}\, f(\overline{\sigma}). \tag{5.3}$$

Вектор напряжений представляется суммой

$$\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^0 + \overline{a}, \tag{5.4}$$

где $\overline{\sigma}^0$ – вектор активных напряжений, $\overline{a}$ – вектор добавочных микронапряжений [1, 2, 6]. Для поверхности нагружения при трансляционно-изотропном упрочнении материала принимается выражение

$$2f(\overline{\sigma}) = \overline{\sigma}^0\overline{\sigma}^0 - C_p(s^p) = 0, \tag{5.5}$$

где $\sigma^0 = C_p(s^p)$ – функция изотропного упрочнения. Вектор $\overline{\sigma}^0$ считается (согласно модели Прагера) ортогональным к предельной поверхности нагружения, то есть

$$\overline{\sigma}^0 = \mathrm{grad}\, f(\overline{\sigma}). \tag{5.6}$$

Такое предположение не совпадает с гипотезой ортогональности полного вектора напряжений $\overline{\sigma}$ к предельной поверхности нагружения в теории процессов, которая учитывает не только поступательную трансляцию поверхности, но и ее поворот. Вектор $\overline{\sigma}^0$ характеризует расширение либо сужение поверхности, которое можно обнаружить, например, при знакопеременном циклическом нагружении. Вектор $\overline{a}$ характеризует трансляцию центра предельной поверхности нагружения и отражает анизотропное упрочнение материала. С учетом (5.3), (5.5) имеем [1, 6–8]

$$d\overline{Э}^p = d\lambda\overline{\sigma}^0 = d\lambda(\overline{\sigma} - \overline{a}), \tag{5.7}$$

откуда $d\lambda = ds^p / \sigma^0$ и

$$d\overline{Э}^p = ds^p \frac{\overline{\sigma}^0}{\sigma^0}, \quad df = \mathrm{grad}\, f(\overline{\sigma}) \cdot d\overline{\sigma}. \tag{5.8}$$

Для активного процесса деформирования $df > 0$. При пассивной деформации (упругой разгрузке) пластическая деформация как бы заморожена и поэтому

$$d\overline{Э}^p = 0, \quad d\overline{Э} = d\overline{Э}^e, \quad df = \mathrm{grad}\, f(\overline{\sigma}) \cdot d\overline{\sigma} < 0. \tag{5.9}$$

Для определения вектора $\overline{a}$ в теории течения [1, 2] используется гипотеза

$$\overline{a} = 2g\overline{Э}^p, \tag{5.10}$$

а в теории [7] – так называемое «эвристическое» дифференциальное уравнение

$$d\overline{a} = g_1 d\overline{Э}^p + ds^p[g_a\overline{a} + g_э\overline{Э}^p], \tag{5.11}$$

где $ds^p = g_0 ds$, g_0 – параметр процесса.

Корректность уравнения (5.11) должна быть доказана, что было отмечено в работах [1, 2, 8]. Для траекторий малой и средней кривизны и малого кручения в качестве закона упрочнения принимается закон Одквиста

$$\sigma = H(s^p), \tag{5.12}$$

мало отличающийся от единой кривой Роша и Эйхингера в виде

$$\sigma = H(Э^p), \tag{5.13}$$

и аппроксимирующие диаграммы представляются в виде

$$\sigma = H(Э^p) = C_p(Э^p) + a, \quad a = 2G_* Э^p + \sigma_a(1 - e^{-\beta Э^p}), \tag{5.14}$$

$$\sigma = H(s^p) = C_p(s^p) + a, \quad a = 2G_* s^p + \sigma_a(1 - e^{-\beta s^p}), \tag{5.15}$$

где выражение a для добавочных микронапряжений было, по-видимому, впервые предложено в [7]. Параметры $2G_*$ характеризуют в (5.14), (5.15) образование микронапряжений линейного типа, а β, σ_a – нелинейного типа.

Для простого нагружения ($s^p = Э^p$) из (5.11) имеем

$$\dot{a} = \dot{s}[g_1 + g_a a + g_Э s^p]. \tag{5.16}$$

Из (5.14), (5.15) для $s^p = Э^p$ после дифференцирования по времени t и исключения $\exp(-\beta\Delta s)$ получаем

$$\dot{a} = \dot{s}[2G_* + \beta(\sigma_a - a + 2G_* s^p)]. \tag{5.17}$$

Сравнивая (5.16) и (5.17), находим

$$g_1 = 2G_* + \beta\sigma_a, \quad g_a = -\beta, \quad g_Э = 2G_*\beta, \tag{5.18}$$

что по существу совпадает с функционалами из работы [7].

Определяющее соотношение (5.11) в скалярной форме принимает вид

$$da_k = g_1\, dЭ_k^p + ds^p[g_a a_k + g_Э Э_k^p], \quad (k = 1, 2, 3). \tag{5.19}$$

Уравнение (5.19) можно решить одним из численных методов, например, методом Рунге–Кутта четвертого порядка точности при соответствующих начальных условиях (задача Коши).

Теперь возвратимся к вопросу о корректности использования в теории течения соотношения (5.11). Как было показано в п. 3, из нелокальной формы определяющего соотношения (3.4) теории процессов при $\overline{Э} = \overline{Э}^e + \overline{Э}^p$, $\overline{Э}^e = \overline{\sigma}/2G$ следует определяющее соотношение модифицированной теории течения автора (3.11), (3.12)

$$d\overline{\sigma} = g_1\, d\overline{Э}^p + ds[g_\sigma \overline{\sigma} + g_Э \overline{Э}^p]. \tag{5.20}$$

Полагая в (5.20) $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^0 + \overline{a}$, находим

$$d\overline{a} = g_1 d\overline{Э}^p + ds[g_\alpha \overline{a} + g_Э \overline{Э}^p] + \overline{\sigma}^*, \tag{5.21}$$

где

$$\overline{\sigma}^* = ds g_\sigma \overline{\sigma}^0 - d\overline{\sigma}^0 = [ds g_\sigma \sigma^0 - d\sigma^0]\hat{\sigma}^0 - d\hat{\sigma}^0. \tag{5.22}$$

В рассматриваемой выше модели с учетом $\hat{\sigma}^0 \cdot d\hat{\sigma}^0 = 0$, имеем $\hat{\sigma}^0 \perp d\hat{\sigma}^0$. В модели Прагера $\sigma^0 = \text{const}$, то есть во все время процесса сохраняется неизменным направление вектора $\overline{\sigma}^0 = \sigma^0\hat{\sigma}^0$, что маловероятно. Но если это так, то $d\hat{\sigma}^0 = 0$, $\overline{\sigma}^* = [ds g_\sigma \sigma^0 - d\sigma^0]\hat{\sigma}^0$. Если предположить, что $\overline{\sigma}^* = 0$, то из (5.21) следует «эвристическое» соотношение (5.11), а из (5.22) – уравнение для σ^0:

$$\frac{d\sigma^0}{ds} = g_\sigma \sigma^0, \quad \sigma^0 = \sigma^T e^{\int_0^{\Delta s} g_\sigma ds} = \sigma^T e^{-\beta\Delta s}, \tag{5.23}$$

где принято $g_\sigma = -\beta = \text{const}$. Из полученного результата следует, что функция-радиус предельной поверхности $\sigma^0 = C_p(s^p)$, характеризующая изотропное упрочнение или разупрочнение, в процессе деформирования уменьшается и при $s^p \to \infty$ предельная поверхность превратится в точку. Уменьшение объема предельной поверхности подтверждается результатами обработки экспериментальных данных авторов [7]. Приведенные в [7] табличные значения функции C_p показывают, что для подавляющего числа обработанных экспериментальных данных при растяжении функция изотропного упрочнения убывает с ростом длины дуги s^p. Если предположить, что

$\overline{\sigma}^0 = \text{const}, \sigma^0 = \sigma^T$, то есть имеет место только трансляционное упрочнение, то $\overline{\sigma}^* = = dsg_\sigma \overline{\sigma}^T$, и из (5.21) следует

$$d\overline{\sigma} = g_1 d\overline{Э}^p + ds[g_\sigma \overline{\sigma} + g_Э \overline{Э}^p], \tag{5.24}$$

что соответствует модифицированной теории течения при $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}^T + \overline{a}$. В формуле (5.24) принято: $g_1 = N_1^p, g_\sigma = N_\sigma^p, g_Э = N_Э^p$.

Нелокальная форма определяющего соотношения и ее вариант соотношений модифицированной теории течения в своей основе опираются на принцип ортогональности полного вектора напряжений $\overline{\sigma}$ к предельной поверхности. Из этого принципа естественным образом следует, что векторы $\overline{\sigma}^0$ и $\overline{a}$ имеют направление полного вектора напряжений $\overline{\sigma}$, то есть $\hat{\sigma}^0 = \hat{a} = \hat{\sigma}, \hat{\sigma}^0 = \sigma^0 \hat{a}, \hat{\sigma} = \sigma \hat{a}$. Если принять это утверждение, то

$$d\overline{\sigma} = g_1 d\overline{Э}^p + ds[g_\sigma^0 \overline{\sigma} + g_Э^0 \overline{Э}^p], \quad ds = g_0 ds_0, \tag{5.25}$$

откуда следует соотношение

$$d\overline{a} = g_1^0 d\overline{Э}^p + ds[g_a^0 \overline{a} + g_Э^0 \overline{Э}^p], \tag{5.26}$$

аналогичное соотношению (5.11), где

$$g_1^0 = \frac{a}{\sigma} g_1, \quad g_a^0 = g_\sigma^0 - \frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma^0}{ds}, \quad g_Э^0 = \frac{a}{\sigma} g_Э, \quad ds = g_0 ds^p.$$

Таким образом, соотношение (5.11) в [7] является корректным только при выполнении гипотезы ортогональности полного вектора напряжений к предельной поверхности. Но в таком случае нет необходимости раскладывать полный вектор напряжений $\overline{\sigma}$ на вектор активных $\overline{\sigma}^0$ и вектор добавочных $\overline{a}$ напряжений, как это и предлагается делать в модифицированной теории течения и ее математической модели пластического деформирования.

Литература

1. *Зубчанинов В.Г.* Математическая теория пластичности / В.Г. Зубчанинов. – Тверь: ТГТУ, 2002. – 300 с.

2. *Зубчанинов В.Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность / В.Г . Зубчанинов. – М.: Физматлит, 2008. – 336 с.

3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: АН СССР, 1963. – 271 с.

4. *Ильюшин А.А.* Труды. Т. 2. Пластичность (1946–1966) / А.А. Ильюшин. – М.: Физматлит, 2004. – 479 с.

5. *Зубчанинов В.Г.* Гипотеза ортогональности и принцип градиентальности в теории пластичности / В.Г. Зубчанинов // Известия РАН. МТТ. – 2008. – №5. – С. 68–73.

6. *Новожилов В.В.* Вопросы механики сплошной среды / В.В.Новожилов. –Л.: Судостроение, 1989. – 397 с.

7. *Бондарь В.С.* Неупругость. Варианты теории / В.С. Бондарь. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.

8. *Зубчанинов В.Г.* Об активных и пассивных процессах сложного нагружения в теории пластичности / В.Г. Зубчанинов // Современные проблемы теории пластичности. – М.: МГТУ «МАМИ», 2007. – С. 3–18.

9. *Поль Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения / Б. Поль // Разрушение. Т. 2. Математические основы теории разрушения. – М.: Мир, 1975. – С. 336–520.

[4.05.2009]

A MODIFIED THEORY OF YIELD AND MATHEMATICAL MODELS OF THE PROCESSES OF PLASTIC DEFORMATION

V.G. Zubchaninov

A modified theory of yield and mathematical models of the theory of processes and yields for deformation trajectories of low and moderate curvature and torsion are presented, based on the relations of the theory of plastic deformation processes.

Key words: plasticity, elasticity, processes, yield, complex loading, deformation, orthogonality, gradientality.