

УДК 539.3

## ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ВИБРАЦИОННЫЙ ИЗГИБ ТОЛСТОСТЕННОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ ТОРЦОВ

П.Ф. Недорезов

*Саратов*

Рассматриваются установившиеся осесимметричные колебания толсто-стенной круговой цилиндрической оболочки из вязкоупругого материала под действием распределенного по цилиндрическим поверхностям давления, которое меняется во времени по гармоническому закону. Система четырех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для определения составляющих радиального и осевого перемещений записывается без каких-либо предварительных предположений о характере изменения искомых величин по толщине. Для понижения размерности системы при произвольном способе закрепления торцевых сечений применяется метод сплайн-коллокации. Соответствующая краевая задача решается численно методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

В качестве примера рассмотрены колебания свободно опертых по торцам оболочек с одинаковым радиусом срединной поверхности при различных значениях длины и толщины. Проведено сравнение результатов по строгой и классической теории, базирующейся на гипотезах Кирхгофа–Лява. Отмечены некоторые особенности изменения по радиусу составляющих радиального перемещения, которые не могут быть обнаружены в рамках любой приближенной теории, предполагающей постоянство прогибов по толщине оболочки.

### 1. Постановка задачи, основные уравнения

Рассматривается толстостенная круговая цилиндрическая оболочка, у которой  $r_1, r_2, R = (r_1 + r_2)/2$  – соответственно радиусы внутренней, внешней и срединной цилиндрических поверхностей,  $h = r_2 - r_1$  – толщина,  $L$  – длина. Оболочка отнесена к цилиндрической системе координат  $r, \theta, x$  и совершает установившиеся поперечные колебания под действием распределенного по внутренней и внешней поверхностям нормального давления:

$$\sigma_r(r_1, \theta, x, t) = -q^-(x) \cos \omega t, \quad \sigma_r(r_2, \theta, x, t) = -q^+(x) \cos \omega t. \quad (1)$$

В этом случае тангенциальное смещение  $u_\theta$  и касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$  и  $\tau_{\theta x}$  равны нулю, а радиальное  $u_r$  и осевое  $u_x$  смещения и напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_x$  и  $\tau_{rx}$  не зависят от полярного угла  $\theta$ .

Уравнения состояния для материала оболочки, который предполагается изотропным и вязкоупругим, принимаются в виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= A^{-1} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \{ (1-\nu)\varepsilon_r(r, x, \tau) + \nu[\varepsilon_\theta(r, x, \tau) + \varepsilon_x(r, x, \tau)] \} d\tau, \\
\sigma_\theta &= A^{-1} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \{ (1-\nu)\varepsilon_\theta(r, x, \tau) + \nu[\varepsilon_r(r, x, \tau) + \varepsilon_x(r, x, \tau)] \} d\tau, \\
\sigma_x &= A^{-1} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \{ (1-\nu)\varepsilon_x(r, x, \tau) + \nu[\varepsilon_r(r, x, \tau) + \varepsilon_\theta(r, x, \tau)] \} d\tau, \\
\tau_{rx} &= [2(1+\nu)]^{-1} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \varepsilon_{rx}(r, x, \tau) d\tau; \quad \nu = \text{const}, \quad A = (1+\nu)(1-2\nu),
\end{aligned} \tag{2}$$

деформации считаются малыми.

С учетом установившегося характера колебательного процесса все составляющие напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки представляются в виде

$$\{u_r, u_x, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_x, \tau_{rx}\} = \sum_{k=1}^2 \{u_r^{(k)}, u_x^{(k)}, \sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)}, \sigma_x^{(k)}, \tau_{rx}^{(k)}\} \cos[(k-1)\pi/2 - \omega t], \tag{3}$$

где функции  $u_r^{(k)}, u_x^{(k)}, \sigma_r^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)}, \sigma_x^{(k)}, \tau_{rx}^{(k)}$  зависят только от  $r$  и  $x$ .

Для безразмерных составляющих смещений  $U_r^{(k)} = u_r^{(k)}/h$ ,  $U_x^{(k)} = u_x^{(k)}/h$  ( $k = 1, 2$ ) в [1] из уравнений движения сплошной среды с учетом (2) получена система уравнений:

$$\begin{aligned}
2(1-\nu)L_0^2 \left[ h_0^{-2} \frac{\partial^2 U_r^{(k)}}{\partial \zeta^2} + h_0^{-1}(1+h_0\zeta)^{-1} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial \zeta} - (1+h_0\zeta)^{-2} U_r^{(k)} \right] + (1-2\nu) \frac{\partial^2 U_r^{(k)}}{\partial \xi^2} + \\
+ L_0 h_0^{-1} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} = (-1)^k \frac{2AL^2 \rho \omega^2}{E_1^2 + E_2^2} \sum_{j=1}^2 E_{j+k-1} U_r^{(j)}, \\
(1-2\nu)L_0^2 h_0^{-1} \left[ h_0^{-1} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial \zeta^2} + (1+h_0\zeta)^{-1} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial \zeta} \right] + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial \xi^2} + L_0 h_0^{-1} \frac{\partial^2 U_r^{(k)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \\
+ L_0 (1+h_0\zeta)^{-1} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial \xi} = (-1)^k \frac{2AL^2 \rho \omega^2}{E_1^2 + E_2^2} \sum_{j=1}^2 E_{j+k-1} U_x^{(j)} \quad (k=1, 2).
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $\xi = x/L$ ,  $\zeta = (r-R)/h$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ;  $-1/2 \leq \zeta \leq 1/2$ ) – безразмерные переменные,  $h_0 = h/R$  и  $L_0 = L/R$  – безразмерные толщина и длина оболочки,  $E_1 + iE_2 = \int_0^\infty K(s) e^{i\omega s} ds$  – комплексный модуль материала,  $E_3 = -E_1$ .

## 2. Методика численного решения

В случае свободно опертых краев оболочки и для функций  $q^\mp(\xi)$ , меняющихся по длине оболочки по синусоидальному закону, при решении системы уравнений (4) в [1] применялся метод разделения переменных. При иных способах закрепления торцевых сечений и произвольных функциях  $q^\mp(\xi)$  понижение размерности системы уравнений (4) можно выполнить методом сплайн-коллокации, эффективность которого подтверждена при решении большого количества различных задач статики

и динамики упругих пластин и оболочек [2]. С этой целью решение системы (4) ищется в виде

$$U_r^{(k)}(\zeta, \xi) = \sum_{j=0}^N \varphi_j(\xi) W_{j+(k-1)(N+1)}(\zeta), \quad U_x^{(k)}(\zeta, \xi) = \sum_{j=0}^N \psi_j(\xi) U_{j+(k-1)(N+1)}(\zeta) \quad (k=1,2), \quad (5)$$

где  $\varphi_j(\xi)$  и  $\psi_j(\xi)$  ( $j = \overline{0, N}$ ) – специальным образом подобранные функции, позволяющие автоматически удовлетворить условиям закрепления конечных сечений. В качестве таких функций удобно выбрать линейные комбинации нормализованных кубических  $B$ -сплайнов  $B_{3,j}(\xi)$  [3], определенных на равномерной сетке

$$\Delta = \{\xi_{-3} < \xi_{-2} < \dots < \xi_{N+3}\}, \quad \xi_i = i/N \quad (i = \overline{-3, N+3}).$$

При жестком закреплении конечных сечений функции  $\varphi_j(\xi)$  и  $\psi_j(\xi)$  ( $j = \overline{0, N}$ ), обеспечивающие выполнение при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  условий  $U_r^{(k)} = U_x^{(k)} = 0$  ( $k = 1,2$ ), имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi) = \psi_0(\xi) &= -4B_{3,-1}(\xi) + B_{3,0}(\xi), \quad \varphi_1(\xi) = \psi_1(\xi) = -B_{3,1}(\xi) + B_{3,1}(\xi), \\ \varphi_j(\xi) = \psi_j(\xi) &= B_{3,j}(\xi) \quad (j = \overline{2, N-2}), \quad \varphi_{N-1}(\xi) = \psi_{N-1}(\xi) = B_{3,N-1}(\xi) - B_{3,N+1}(\xi), \\ \varphi_N(\xi) = \psi_N(\xi) &= B_{3,N}(\xi) - 4B_{3,N+1}(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

При свободном опирании торцов в сечениях при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  должны выполняться условия  $U_r^{(k)} = \sigma_r^{(k)} = 0$ , что равносильно требованиям

$$U_r^{(k)}(\zeta, 0) = U_r^{(k)}(\zeta, 1) = 0, \quad \frac{\partial U_x^{(k)}(\zeta, 0)}{\partial \xi} = \frac{\partial U_x^{(k)}(\zeta, 1)}{\partial \xi} = 0.$$

Эти условия будут удовлетворены, если для функций  $\varphi_j(\xi)$  сохранить выражения из (6), а функции  $\psi_j(\xi)$  взять в виде

$$\begin{aligned} \psi_0(\xi) &= B_{3,0}(\xi), \quad \psi_1(\xi) = B_{3,-1}(\xi) + B_{3,1}(\xi), \quad \psi_j(\xi) = B_{3,j}(\xi) \quad (j = \overline{2, N-2}), \\ \psi_{N-1}(\xi) &= B_{3,N-1}(\xi) + B_{3,N+1}(\xi), \quad \psi_N(\xi) = B_{3,N}(\xi). \end{aligned} \quad (7)$$

После подстановки выражений (5) в уравнения (4) из требования, чтобы полученные соотношения выполнялись в точках коллокации  $\xi = \xi_i^*$ , которые выбираются по правилу  $\xi_i^* = \xi_i + s/N$ , ( $i = \overline{0, N/2-1}$ ),  $\xi_{N/2}^* = \xi_{N/2}$ ,  $\xi_i^* = \xi_i - s/N$ , ( $i = \overline{N/2, N-1}$ ),  $0 < s < 1$ , следует система  $4N + 4$  обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $W_r(\zeta)$  и  $U_r(\zeta)$  ( $r = \overline{0, 2N+1}$ ). Эта система разрешается относительно вторых производных от искомых функций, что возможно при соответствующем выборе параметра  $s$ , определяющего точки коллокации. Полученная система затем преобразуется в систему  $8N + 8$  уравнений первого порядка, которая в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\bar{Y}}{d\zeta} = D\bar{Y}(\zeta). \quad (8)$$

Здесь  $\bar{Y}(\zeta) = \{U_0, \dots, U_{2n+1}, W_0, \dots, W_{2n+1}, U'_0, \dots, U'_{2n+1}, W'_0, \dots, W'_{2n+1}\}$  – вектор неизвестных,  $D$  – известная матрица размерности  $(8N + 8) \times (8N + 8)$ .

Граничные условия для функции  $\bar{Y}(\zeta)$  получаются после подстановки выражений (5) в условия для составляющих напряжений  $\sigma_r^{(k)}$  и  $\tau_{rx}^{(k)}$  при  $\zeta = \pm 1/2$ . Эти условия, выполнение которых требуется в точках коллокации  $\xi = \xi_i^*$ , могут быть преобразованы к виду

$$H_1 \bar{Y}(-1/2) = \bar{e}_1, \quad H_2 \bar{Y}(1/2) = \bar{e}_2, \quad (9)$$

где  $H_1 = \{h_{ij}\}$ ,  $H_2 = \{h_{i+4N+4,j}\}$ ,  $\bar{e}_1 = \{e_i\}$ ,  $\bar{e}_2 = \{e_{i+4N+4}\}$  ( $i = \overline{0, 4N+3}$ ;  $j = \overline{0, 8N+7}$ ) – известные матрицы и векторы.

Краевая задача (8), (9) решается численно устойчивым методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

### 3. Результаты числовых расчетов

Изложенная выше методика была применена для определения критических частот и НДС свободно опертых по торцам оболочек из материала ЭД-6 МА ( $E_1 = 2,7 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $E_2/E_1 = \text{tg} \delta = 0,015$ ,  $\rho = 1250$  кг/м<sup>3</sup>) под действием распределенного по внешней поверхности давления интенсивности  $q(\xi, t) = p_0 \cos \omega t$ ,  $p_0 = 1$  Н/м<sup>2</sup>. Рассматривались оболочки с геометрическими параметрами  $R = 1,0$  м;  $L_0 = 1,0$ ;  $2,0$ ;  $\pi$  и  $5,0$ ;  $h_0 = 0,025, 0,050, \dots, 0,250$  при значениях  $\omega \leq 25500$  с<sup>-1</sup>. Вычисления проводились при  $N = 80$ , при реализации метода Годунова шаг по  $\zeta$  был принят  $h_\zeta = 0,025$ .

Для некоторых из этих оболочек первые три критические частоты  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), при которых достигаются максимумы амплитуды  $U_r$  радиального смещения точек срединной поверхности в сечении  $\xi = 0,5$ , приведены в первой строке таблицы. Во второй строке этой таблицы даны значения тех же величин, вычисленные с применением уравнений классической теории, основанной на гипотезах Кирхгофа–Лява [4].

Таблица

$h_0 \backslash L_0$	1,0	2,0	$\pi$	5,0
0,025	1460; 1766; 3077	1405; 1482; 1600	1242; 1457; 1479	884; 1429; 1460
	1461; 1792; 3210	1405; 1487; 1632	1242; 1459; 1493	884; 1429; 1461
0,050	1471; 2431; 5293	1406; 1539; 1982	1242; 1466; 1553	884; 1430; 1466
	1474; 2525; 5895	1406; 1551; 2046	1242; 1470; 1574	884; 1431; 1475
0,100	1512; 3897; 8395	1407; 1738; 2908	1242; 1499; 1799	884; 1434; 1507
	1526; 4362; 11512	1409; 1787; 3207	1243; 1513; 1868	884; 1438; 1526
0,150	1573; 4869; 10112	1410; 1989; 3716	1243; 1551; 2098	884; 1440; 1569
	1607; 6334; 17185	1414; 2122; 4522	1243; 1581; 2267	884; 1449; 1607
0,200	1648; 5616; 11091	1415; 2244; 4341	1243; 1614; 2391	884; 1450; 1644
	1715; 8343; 22849	1421; 2517; 5887	1244; 1673; 2732	884; 1464; 1713
0,250	1730; 6146; 11672	1420; 2479; 4808	1244; 1684; 2653	884; 1462; 1724
	1844; 10367; 25165	1430; 2948; 7274	1245; 1783; 3233	884; 1483; 1844

Вычисления показывают, что локальные экстремумы радиального смещения достигаются в моменты времени  $t = t_i^{(2)}$  ( $\sin \omega_k t_i^{(2)} = 1$ ) в сечениях  $\xi = 0,5$  при  $\omega = \omega_1$ ;  $\xi = 0,1625$  и  $\xi = 0,5$  при  $\omega = \omega_2$  и в сечениях  $\xi = 0,1$ ,  $\xi = 0,3$  и  $\xi = 0,5$  при  $\omega = \omega_3$ . Эти значения на один-два порядка превосходят соответствующие значения в моменты времени  $t = t_i^{(1)}$  ( $\cos \omega_k t_i^{(1)} = 1$ ). Здесь и в дальнейшем все результаты, полученные в сечениях  $\xi = \text{const}$ , в силу симметрии приведены только для  $\xi \leq 0,5$ .

Как следует из данных этой таблицы, изменение толщины оказывает существенное влияние на значения критических частот только в очень коротких оболочках ( $L_0 < 2,0$ ). Однако уже при  $L_0 = 2,0$  десятикратное увеличение толщины  $h_0$  увеличивает значение  $\omega_1$  только на 1%,  $\omega_2$  – почти в два раза, а  $\omega_3$  – в три раза. При  $L_0 \geq 3,0$  толщина  $h_0$  практически не влияет на значение  $\omega_1$  и мало сказывается на значениях  $\omega_2$  и  $\omega_3$ . Для таких оболочек увеличение толщины ведет только к уменьшению значений локальных экстремумов радиального смещения  $U_r$ . Например, для оболочки с  $L_0 = 5,0$  значения максимумов  $U_r$  при  $h_0 = 0,025$  и  $h_0 = 0,25$  отличаются на два порядка.

Сравнение результатов расчета на основе точных уравнений (4) с соответствующими результатами по теории, базирующейся на гипотезах Кирхгофа–Лява, показывает, что классическая теория качественно верно описывает форму срединной поверхности колеблющейся оболочки. Форма изогнутой срединной поверхности оболочки с параметрами  $h_0 = 0,050$ ,  $L_0 = \pi$  при критических частотах в моменты времени  $t = t_i^{(2)}$  показана на рис. 1, номера кривых на этом рисунке соответствуют номерам критических частот. При всех других рассмотренных значениях  $h_0$  и  $L_0$  графики качественно не меняются.

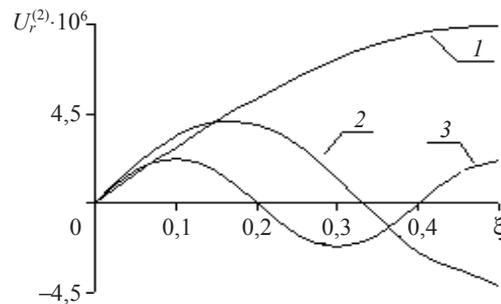


Рис. 1

При определении критических частот классическая теория всегда дает для них завышенные значения. В коротких ( $L_0 = 1,0$ ) и тонких ( $h_0 \leq 0,075$ ) оболочках первые две критические частоты по классической теории определяются достаточно точно, но при увеличении толщины погрешность резко возрастает. С увеличением длины оболочки погрешность приближенных значений критических частот уменьшается.

Детальный анализ значений составляющих  $U_r^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) при  $\omega \leq 5000 \text{ с}^{-1}$  показывает, что в окрестности отдельных сечений  $\xi = \xi$  при некоторых значениях  $\omega$  в распределении этих составляющих по толщине оболочки появляются нелинейные эффекты, подобные обнаруженным ранее при изучении колебаний под действием распределенной нагрузки бесконечной пластинки – полосы из вязкоупругого материала [5, 6]. В частности, к таким эффектам относятся "разбухание" и "подтягивание". При "разбухании" в моменты времени  $t = t_i^{(1)}$  ( $\cos \omega_p t_i^{(1)} = 1$ ) точки внешнего контура сечения  $\xi = \xi$  смещаются по радиусу в направлении, противоположном направлению действия нагрузки, а точки внутреннего контура – к центру. При "подтягивании" точки внутреннего и внешнего контуров сечения  $\xi = \xi$  при  $\omega = \omega_n$  в моменты времени  $t = t_i^{(2)}$  ( $\sin \omega_n t_i^{(2)} = 1$ ) перемещаются навстречу друг другу.

При приближении  $\omega$  к частоте "разбухания"  $\omega_p$  или частоте "подтягивания"  $\omega_n$  соответствующая составляющая радиального смещения в этом сечении начинает

сильно нелинейно меняться по толщине. Вблизи частоты "разбухания" составляющая  $U_r^{(1)}$  в сечении  $\xi = \xi$  по толщине дважды меняет знак, тогда как  $U_r^{(2)}$  в этом и  $U_r^{(k)}$  ( $k=1,2$ ) в других сечениях по радиусу практически не меняются. Аналогичная картина имеет место и при "подтягивании". Отметим также, что "разбухание" и "подтягивание" могут происходить как при одном значении частоты  $\omega$ , так и в полосе частот  $\omega_* \leq \omega \leq \omega_{**}$ . Например, при  $L_0 = 1, h_0 = 0,025$  "разбухание" происходит при  $\omega = \omega_p = 2772 \text{ с}^{-1}$  в сечении  $\xi = 0,5$ , а "подтягивание" – в сечении  $\xi = 0,2$  при  $3761 \text{ с}^{-1} \leq \omega_n \leq 3780 \text{ с}^{-1}$ . При этом "разбухание" или "подтягивание" могут одновременно иметь место в нескольких сечениях. Так, в оболочке с  $L_0 = 2,0, h_0 = 0,075$  при  $2574 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 2581 \text{ с}^{-1}$  "разбухание" происходит в сечении  $\xi = 0,2$ , при  $2581 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 2588 \text{ с}^{-1}$  – одновременно в сечениях  $\xi = 0,2$  и  $\xi = 0,5$ , а при  $2589 \text{ с}^{-1} \leq \omega \leq 2593 \text{ с}^{-1}$  – только в сечении  $\xi = 0,5$ . Ширина полос частот "разбухания" и "подтягивания" увеличивается с ростом длины и толщины оболочки. Наконец, "разбухание" или "подтягивание" могут происходить как в узкой окрестности какого-либо сечения, так и в достаточно широком интервале значений  $\xi$ . Например, в оболочке с  $L_0 = 1, h_0 = 0,025$  при третьей критической частоте  $\omega = \omega_3$  "подтягивание" наблюдается в моменты времени  $t = t_*$  ( $\cos \omega_3 t_* = 1$ ) при значениях  $0,08 \leq \xi \leq 0,25$ . Иллюстрацией указанных эффектов служат графики, изображенные на рис. 2 и 3.

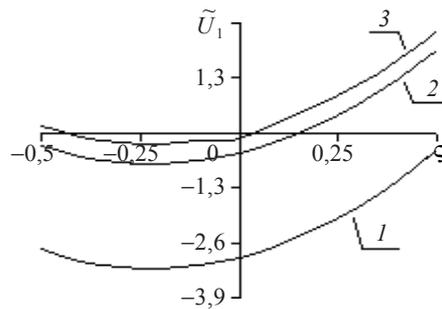


Рис. 2

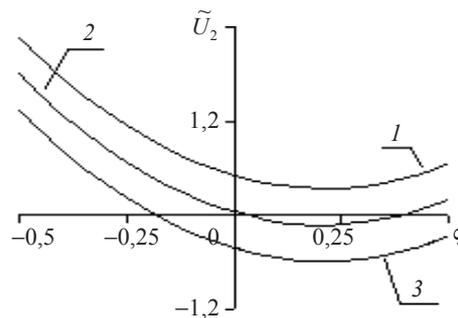


Рис. 3

На рис. 2 показано изменение по толщине функции  $\tilde{U}_1 = 10^9 U_r^{(1)}$  ( $\zeta, \xi = 0,5$ ) для оболочки с  $L_0 = 2,0, h_0 = 0,075$ , здесь кривая 1 соответствует частоте  $\omega = 1763 \text{ с}^{-1}$ , кривая 2 ("разбухание") – частоте  $\omega = \omega_p = 1768 \text{ с}^{-1}$ , кривая 3 – частоте  $\omega = 1779 \text{ с}^{-1}$ . Для оболочки с  $L_0 = 1,0, h_0 = 0,025$  при частоте "подтягивания", которое происходит

в сечении  $\xi = 0, 2$ , и близких к ней значениях графики функции  $\tilde{U}_2 = 10^{11} U_r^{(2)}$  ( $\zeta, \xi = 0, 2$ ) представлены на рис. 3: кривая 1 – при  $\omega = 3755 \text{ с}^{-1}$ , кривая 2 – при  $\omega = 3760 \text{ с}^{-1}$ , кривая 3 ("подтягивание") – при  $\omega = \omega_n = 3765 \text{ с}^{-1}$ .

Указанные эффекты наблюдаются как в длинных, так и в коротких оболочках при всех рассмотренных значениях относительной толщины. Эти эффекты объясняются сложным волновым характером колебательного процесса и не могут быть обнаружены в рамках любой приближенной теории, предполагающей постоянство прогибов по толщине оболочки.

**Ключевые слова:** осесимметричный вибрационный изгиб, толстостенная круговая цилиндрическая оболочка, вязкоупругий материал.

#### *Литература*

1. Недорезов, П.Ф. Численное исследование осесимметричного вибрационного изгиба толстостенной вязкоупругой цилиндрической оболочки / П.Ф. Недорезов // Сб. докл. XX Международ. конф. по теории оболочек и пластин (Н. Новгород, 17–19 сентября 2002 г.). – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – С. 224–230.
2. Григоренко, Я.М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) / Я.М. Григоренко, Н.Н. Крюков // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, №6. – С. 3–26.
3. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Ю.И. Квасов, И.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
4. Недорезов, П.Ф. Численные методы исследования установившихся колебаний вязкоупругих прямоугольных пластинок и круговых цилиндрических оболочек: Учеб. пособие / П.Ф. Недорезов, Н.М. Сироткина. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1997. – 70 с.
5. Недорезов, П.Ф. О колебаниях толстой вязкоупругой пластинки-полосы, свободно опертой по краям / П.Ф. Недорезов // Нелинейная динамика механических и биологических систем: Межвуз. науч. сб. / СГТУ, Саратов. – 2004. – Вып. 2. – С. 20–27.
6. Недорезов, П.Ф. Применение метода сплайн-коллокации в задачах о колебаниях толстой вязкоупругой пластинки-полосы / П.Ф. Недорезов // Известия Саратовского университета. Новая серия. – 2006. – Т. 6. Серия Математика. Механика. Информатика. – Вып. 1/2. – С. 58–66.

[30.05.2008]

### AXISYMMETRIC VIBRATIONAL BENDING OF THICK-WALLED CYLINDRICAL SHELL OF VISCOELASTIC MATERIAL UNDER ARBITRARY FIXING OF SECTIONS

**P.F. Nedorezov**

Stable axisymmetric vibrations of a thick-walled circular cylindrical shell made of a visco-elastic material are examined under pressure distributed in cylindrical surfaces which changes in time according to the law of harmonic. A system of four partial differential equations of the second order for defining the constituents of radial and axial displacements is written without any preliminary suppositions about the character of changes in unknown values on thickness. A spline-collocation method is used for decreasing the system dimension under an arbitrary way of fixing of sections. A corresponding boundary problem is numerically solved using a discrete Godunov method of orthogonalization.

As an example the vibrations of shells with the same radius of the surface under various values of length and thickness. A comparison of results according to a strict and classic theory based on Kirchhoff–Love hypotheses is performed. Some peculiarities of changes on the radius of the radial displacement constituents which can not be detected in the frames of any approximated theory, assuming constancy of bending on the shell thickness are noted.

**Key words:** axisymmetric vibrational bending, thick-walled cylindrical shell, visco-elastic material.