

УДК 539.3

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА
ДЛЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ГЛАДКОГО ШТАМПА
И УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА ДОРЭЛЕЕВСКОМ
ИНТЕРВАЛЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ***

© 2017 г. Ломунов А.К.¹, Пряжевский Р.Д.², Федотенков Г.В.²

¹Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация
²Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Российская Федерация

greghome@mail.ru

Поступила в редакцию 07.12.2016

В рамках плоской постановки рассмотрена нестационарная задача о контактном взаимодействии абсолютно твердого штампа, ограниченного гладкой выпуклой кривой, с упругой полуплоскостью. Закон движения штампа предполагается известным. Постановка задачи включает уравнения движения плоской теории упругости в потенциалах упругих смещений, связи потенциалов с перемещениями и напряжениями, начальные условия и граничные условия смешанного типа. Полагается, что контакт происходит в условиях свободного проскальзывания. На основании принципа суперпозиции нормальные перемещения границы полуплоскости представляются сверткой нормальных напряжений с функцией влияния. Функция влияния является решением задачи Лэмба. Метод решения основан на введении аналитических представлений для искомых функций и применении аналитического алгоритма совместного обращения интегральных преобразований Фурье – Лапласа. При этом существенно, чтобы функция, описывающая закон движения штампа, являлась однородной. Для случая движения границ области контакта со скоростями, не превышающими скорость распространения волн Рэлея, получены аналитические соотношения, разрешающие задачу.

Ключевые слова: нестационарные контактные задачи теории упругости, смешанные граничные условия, подвижная граница области контакта, принцип суперпозиции, интегральные преобразования, обобщенные функции, аналитические представления.

Введение

Нестационарные задачи с подвижными границами области взаимодействия являются на сегодняшний день одними из наименее исследованных проблем механики деформируемого твердого тела. Их актуальность связана с тем, что, как извест-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 16-38-50238 мол_нр, 16-08-00260 А).

но, все природные явления в той или иной степени нестационарны. И в то же время самые опасные с точки зрения прочности состояния возникают во время протекания процессов нестационарного взаимодействия тел. Проведение исследований в области нестационарных процессов механики деформируемых твердых тел, выявление их характерных особенностей и получение аналитических решений нестационарных контактных задач являются актуальными для современной космической и авиационной техники, судостроения, автомобилестроения и других отраслей промышленности.

Различные вопросы, связанные с решением нестационарных задач для тел и конструкций (создание математических моделей нестационарного взаимодействия, теоретические, численные и экспериментальные методы исследования нестационарных задач динамики, в том числе для сред с усложненными свойствами), изложены в монографиях А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковского [1], В.Г. Баженова, Л.А. Игумнова [2], В.Б. Поручикова [3], Л.И. Слепяна, Ю.С. Яковлева [4], а также в ряде работ [5–18].

Однако наряду со значительным числом публикаций, посвященных численному исследованию нестационарных контактных задач, имеется лишь ограниченный круг работ, посвященных поиску аналитических решений. Решение плоских нестационарных контактных задач с подвижными границами с использованием принципа суперпозиции сводится к исследованию двумерного граничного интегрального уравнения, ядром интегрального оператора которого является поверхностная функция влияния. Настоящая статья посвящена разработке метода аналитического решения такого уравнения.

1. Постановка задачи

В декартовой прямоугольной системе координат Oxz рассмотрим однородную изотропную линейно упругую полуплоскость $z \geq 0$. В начальный момент времени $t = 0$ в полуплоскость начинает вдавливаться гладкий штамп, закон движения которого задается уравнением $w = f(x, t)$, где w – нормальные перемещения границы полуплоскости (рис. 1).

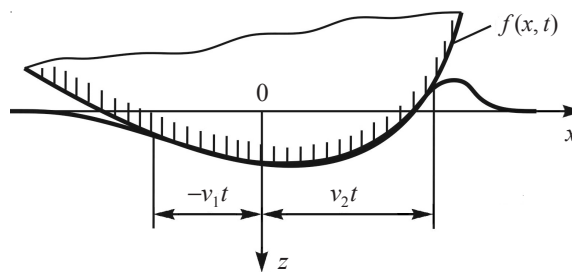


Рис. 1

Введем систему безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры):

$$x = \frac{x'}{L}, \quad z = \frac{z'}{L}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad c_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad v = \frac{v'}{c_1},$$

$$u = \frac{u'}{L}, \quad w = \frac{w'}{L}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\sigma'_{zz}}{\lambda + 2\mu}, \quad \sigma_{xz} = \frac{\sigma'_{xz}}{\lambda + 2\mu}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{L^2}, \quad \psi = \frac{\psi'}{L^2},$$

где L – характерный линейный размер; λ , μ и ρ – параметры Ламе и плотность материала полупространства; c_1 и c_2 – скорости волн растяжения-сжатия и сдвига; τ – безразмерное время; v – некоторая скорость; u и w – компоненты вектора перемещения вдоль осей Ox и Oz ; σ_{zz} и σ_{xz} – нормальные и касательные напряжения; φ и Ψ – скалярная и ненулевая компоненты векторного потенциала упругих смещений.

Движение полуплоскости описывают волновые уравнения относительно потенциалов φ и Ψ [1]:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}, \quad \Delta\Psi = \eta^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Потенциалы φ и Ψ связаны с компонентами вектора перемещений и тензора напряжений следующими соотношениями:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\sigma_{zz} = \Delta\varphi - 2\eta^{-2} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} \right), \quad \sigma_{xz} = \eta^{-2} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} \right).$$

Начальные условия нулевые:

$$\varphi|_{\tau=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}|_{\tau=0} = \Psi|_{\tau=0} = \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}|_{\tau=0} = 0. \quad (3)$$

Полагая, что вне области контакта граница полуплоскости свободна от напряжений, выполняются условия свободного проскальзывания в зоне контакта и в бесконечно удаленной точке среды возмущения ограничены, приходим к следующим граничным условиям:

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = \sigma(x, \tau) = 0 \quad (x < -v_1\tau, \quad x > v_2\tau),$$

$$w|_{z=0} = w(x, \tau) = f(x, \tau) \quad (-v_1\tau < x < v_2\tau), \quad (4)$$

$$\varphi = O(1), \quad \Psi = O(1) \quad (r \rightarrow \infty, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}).$$

2. Метод решения

Для решения поставленной задачи используем принцип суперпозиции [1, 9–11, 15, 16], согласно которому на всей границе полуплоскости $z = 0$ нормальные перемещения и напряжения связаны между собой интегральным соотношением (знак «**» означает свертку по обеим переменным):

$$w(x, \tau) = \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty G(x - \xi, \tau - t) \sigma(\xi, t) d\xi dt = G^{**}\sigma, \quad (5)$$

$$\sigma(x, \tau) = \sigma_{zz}(x, z, \tau)|_{z=0}, \quad w(x, \tau) = w(x, z, \tau)|_{z=0}.$$

Здесь $G(x, t)$ – поверхностная функция влияния, представляющая собой нормальные перемещения границы полуплоскости как решение задачи (1)–(3) с граничными условиями $\sigma(x, \tau) = \delta(x)\delta(\tau)$, $\sigma_{xz}(x, z, \tau)|_{z=0} = 0$ ($\delta(x)$ – дельта-функция Дирака).

В пространстве интегральных преобразований Лапласа по времени τ и Фурье по переменной x интегральный оператор в (5) переходит в произведение изображе-

ний (q – параметр преобразования Фурье, s – параметр преобразования Лапласа, верхний знак L в обозначении функции здесь и далее означает ее трансформанту по Лапласу, а F – трансформанту по Фурье) [1, 4, 14]:

$$w^{FL}(q, s) = G^{FL}(q, s)\sigma^{FL}(q, s). \quad (6)$$

Изображение Фурье – Лапласа функции влияния имеет вид [1]

$$G^{FL}(q, s) = -\eta^4 \frac{s^2 k_1(q^2, s^2)}{R_2(q^2, s^2)}, \quad (7)$$

$$R_2(q, s) = (2q + \eta^2 s)^2 - 4qk_1(q, s)k_2(q, s), \quad k_1(q, s) = \sqrt{q+s}, \quad k_2(q, s) = \sqrt{q+\eta^2 s}.$$

Предположим, что функция $f(x, \tau)$ является однородной степени $n+1$:

$$f(\alpha x, \alpha \tau) = \alpha^{n+1} f(x, \tau), \quad \alpha \in R.$$

Заметим, что функция $G^{FL}(q, s)$ обладает следующими свойствами:

$$G^{FL}(\lambda s, s) = \frac{1}{s} G^{FL}(\lambda, 1),$$

$$\frac{\tau}{\zeta} G^{FL}(-i\tau/\zeta, 1) = -\eta^4 \frac{\theta \beta_1(\theta^2)}{S_2(\theta^2)} = G_0(\theta) \sim -\theta, \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (\theta = \tau/\zeta, \zeta = x + iy \in C), \quad (8)$$

$$S_2(\theta) = (\eta^2 - 2\theta)^2 + 4\theta\beta_1(\theta)\beta_2(\theta), \quad \beta_k(\theta) = \sqrt{\eta_k^2 - \theta}, \quad k=1, 2, \quad \eta_1 = 1, \eta_2 = \eta.$$

Здесь $S_2(\theta)$ – функция Рэлея, являющаяся аналитической функцией в плоскости комплексного переменного θ всюду вне разрезов $(-\eta, -1)$, $(1, \eta)$ и принимающая действительные значения на оси $\text{Im } \theta = 0$ вне этих разрезов. Уравнение $R_2(\theta) = 0$ на физическом листе римановой поверхности имеет лишь один нетривиальный вещественный корень c_R^{-1} , где $c_R < \eta^{-1} < 1$ – скорость волны Рэлея.

Для дальнейшего исследования понадобятся предельные значения $G_0(\tau/(x+i0))$, $G_0(\tau/(x-i0))$ функции $G_0(\theta)$ при стремлении $y \rightarrow \pm 0$. Предельные значения радикалов $\beta_1(\theta^2)$, $\beta_2(\theta^2)$, входящих в выражение для $G_0(\theta)$, определяем на плоскости комплексного переменного θ с разрезами вдоль действительной оси от точек ветвления до бесконечно удаленной точки (рис. 2).

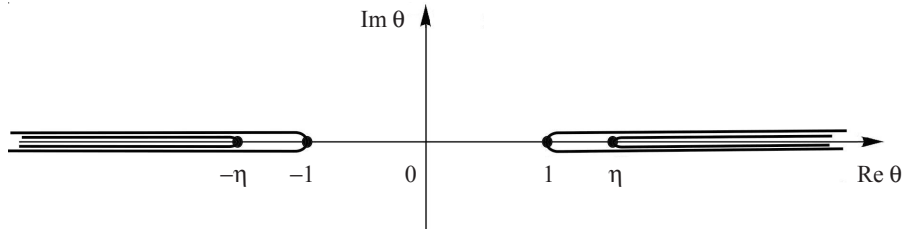


Рис. 2

Однозначные ветви корней фиксируем условиями: $\beta_1(0) = 1$, $\beta_2(0) = \eta$. Аналитически продолжая выбранные ветви от $\theta = 0$ до точек верхних и нижних берегов разрезов, получаем:

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} \beta_k(\theta^2) = \begin{cases} \pm i \operatorname{sgn} x \sqrt{\theta_0^2 - \eta_k^2} & (|\theta_0| > \eta_k), \\ \sqrt{\eta_k^2 - \theta_0^2} & (|\theta_0| < \eta_k), \end{cases} \quad \theta_0 = \tau/x, \quad k=1, 2. \quad (9)$$

Используя (8), находим

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} G_0(\theta) = \begin{cases} G_0(\theta_0) & (|\theta_0| < 1, |x| > \tau), \\ \eta^4 \theta_0 \frac{4\theta_0^2 \beta_1^2(\theta_0^2) \beta_2(\theta_0^2) \mp i \operatorname{sgn} x \sqrt{\theta_0^2 - 1} (\eta^2 - 2\theta_0^2)^2}{(\eta^2 - 2\theta_0^2)^4 - 4\theta_0^4 \beta_1^2(\theta_0^2) \beta_2^2(\theta_0^2)} & \begin{pmatrix} 1 < |\theta_0| < \eta, \\ \eta^{-1} \tau < |x| < \tau \end{pmatrix}, \\ \mp \eta^4 \theta_0 \frac{i \operatorname{sgn} x \sqrt{\theta_0^2 - 1}}{(\eta^2 - 2\theta_0^2)^2 - 4\theta_0^2 \sqrt{\theta_0^2 - 1} \sqrt{\theta_0^2 - \eta^2}} & (|\theta_0| > \eta, |x| < \eta^{-1} \tau). \end{cases} \quad (10)$$

Положим, что напряжение $\sigma(x, \tau)$ представимо в виде

$$\sigma(x, \tau) = D_n(\tau) * Q(\theta_0). \quad (11)$$

Здесь и далее знак «*» означает свертку по времени τ . Функция $D_n(\tau)$, $n = 0, \pm 1, \dots$, определена так:

$$D_0(\tau) = \delta(\tau), \quad D_{n-m}(\tau) = \frac{d^m D_n(\tau)}{d\tau^m}. \quad (12)$$

При $n > 0$ функция $D_n(\tau)$ представлена так:

$$D_n(\tau) = \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n > 0, \quad (13)$$

а при $n \leq 0$ она определяется с помощью (12):

$$D_n(\tau) = \delta^{(n)}(\tau), \quad n < 0. \quad (14)$$

Тогда свертка некоторой функции $g(\tau)$ с функцией $D_n(\tau)$ означает ее n -кратное интегрирование по τ при $n > 0$, n -кратное дифференцирование по τ при $n < 0$ или тождественное преобразование при $n = 0$:

$$g(\tau) * D_n(\tau) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\tau (\tau-t)^{n-1} g(t) dt = \underbrace{\int_0^\tau dt \int_0^t dt \dots \int_0^t g(t) dt}_n, \quad n > 0;$$

$$g(\tau) * D_n(\tau) = g(\tau) * \delta^{(n)}(\tau) = g^{(n)}(\tau) * \delta(\tau) = g^{(n)}(\tau), \quad n < 0;$$

$$g(\tau) * D_0(\tau) = g(\tau) * \delta(\tau) = g(\tau) \quad n = 0.$$

Заметим, что преобразование Лапласа функции $D_n(\tau)$ при любом $n = 0, \pm 1, \dots$ имеет вид $D_n^L(s) = s^{-n}$. Отметим также, что

$$\begin{aligned} D_n(\tau) * D_m(\tau) &= D_{n+m}^{(m)}(\tau) * D_m(\tau) = D_{n+m}(\tau) * D_0(\tau) = D_{n+m}(\tau), \\ D_n(\tau) * D_{-n}(\tau) &= D_0(\tau) = \delta(\tau). \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя к (11) преобразование Лапласа, а затем Фурье, с учетом свойств подобия и теорем о свертке и о дифференцировании изображений получаем

$$\begin{aligned} \sigma^L(x, s) &= s^{-n} x Q(sx), \\ \sigma^{FL}(q, s) &= s^{-n-1} \frac{d}{dq} Q(q/s) = s^{-n-2} \frac{d}{d\lambda} Q(\lambda), \quad \lambda = q/s. \end{aligned}$$

Таким образом, изображение Фурье – Лапласа σ^{FL} обладает такой структурой:

$$\sigma^{FL} = s^{-n-2} Q_0(\lambda). \quad (16)$$

Из соотношения (6) с учетом (8) и (16) находим

$$w^{FL}(q, s) = s^{-n-3} G^{FL}(\lambda, 1) Q_0(\lambda). \quad (17)$$

Следовательно, перемещение представимо в виде

$$w(x, \tau) = D_{n+1}(\tau) * Q_1(\theta_0).$$

Структура изображений (16) и (17) позволяет применить к ним алгоритм совместного обращения интегральных преобразований Фурье – Лапласа [4, 15], который состоит в следующем. Пусть некоторое изображение $F^{FL}(q, s)$ с помощью замены $q = \lambda s$ приводится к виду:

$$F^{FL}(\lambda, s) = g^L(s) h(\lambda), \quad g^L(s) = s^n, \quad g(\tau) = D_{-n}(\tau). \quad (18)$$

Тогда оригинал $F(x, \tau)$ определяется так:

$$F(x, \tau) = \lim_{y \rightarrow +0} [\hat{F}(\zeta, \tau) - \hat{F}(\bar{\zeta}, \tau)], \quad \bar{\zeta} = x - iy, \quad (19)$$

где $\hat{F}(\zeta, \tau)$ – аналитическое представление функции $F(x, \tau)$:

$$\hat{F}(\zeta, \tau) = -\frac{1}{2\pi} g'(\tau) * h(\lambda) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = -\frac{1}{2\pi i \zeta} D_{-n-1}(\tau) * h(-i\theta), \quad \lambda = -i\theta. \quad (20)$$

Используя формулу (20) и представления (16), (17), находим

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\zeta, \tau) &= -\frac{1}{2\pi i \zeta} D_{n+1}(\tau) * Q_0(-i\theta), \\ \hat{w}(\zeta, \tau) &= -\frac{1}{2\pi i \zeta} D_{n+2}(\tau) * G^{FL}(-i\theta, 1) Q_0(-i\theta). \end{aligned} \quad (21)$$

Из первого и второго уравнений в (21) с учетом (15) выражаем $Q_0(-i\tau/\zeta)$:

$$Q_0(-i\theta) = -2\pi \zeta D_{-n-1}(\tau) * \hat{\sigma}(\zeta, \tau), \quad Q_0(-i\theta) = -\frac{2\pi i \zeta D_{-n-2}(\tau) * \hat{w}(\zeta, \tau)}{G^{FL}(-i\theta, 1)}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21) и учитывая (8), получаем связи между аналитическими представлениями для перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} \hat{w}(\zeta, \tau) &= D_{n+2}(\tau) * \{\theta^{-1} G_0(\theta) [D_{-n-1}(\tau) * \hat{\sigma}(\zeta, \tau)]\}, \\ \hat{\sigma}(\zeta, \tau) &= D_{n+1}(\tau) * \theta \frac{D_{-n-2}(\tau) * \hat{w}(\zeta, \tau)}{G_0(\theta)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Исследуем скоростной режим, при котором $0 \leq v_{1,2} < c_R$. Покажем, что в этом случае определяемые с помощью аналитических представлений (23) решения не являются единственными. Пусть аналитическое представление для перемещений имеет вид:

$$\begin{aligned} \hat{w}(\zeta, \tau) &= \hat{w}_*(\theta) = i \operatorname{sgn} x [(v_1^{-1} + \theta)(v_2^{-1} - \theta)]^{-1/2} = \\ &= \begin{cases} i \operatorname{sgn} x [(v_1^{-1} + \theta_0)(v_2^{-1} - \theta_0)]^{-1/2} & (-v_1 \tau < x < v_2 \tau, y \rightarrow \pm 0), \\ \pm [(v_1^{-1} + \theta_0)(\theta_0 - v_2^{-1})]^{-1/2} & (x < -v_1 \tau, x > v_2 \tau, y \rightarrow \pm 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда при $-v_1\tau < x < v_2\tau$ перемещения равны нулю, так как

$$\lim_{y \rightarrow +0} [\hat{w}_*(\theta) - \hat{w}_*(\bar{\theta})] = 0.$$

При $x < -v_1\tau, x > v_2\tau$ перемещения отличны от нуля:

$$\lim_{y \rightarrow +0} [\hat{w}_*(\theta) - \hat{w}_*(\bar{\theta})] = 2[(v_1^{-1} + \theta_0)(\theta_0 - v_2^{-1})]^{-1/2}.$$

В то же время при $x < -v_1\tau, x > v_2\tau$, как следует из (10), напряжения, соответствующие аналитическому представлению, построенному по второй формуле в (23) с учетом (24), равны нулю, а при $-v_1\tau < x < v_2\tau$ отличны от нуля. Следовательно, представление (24) для перемещений приводит к ненулевому решению при однородных граничных условиях (4). Поэтому для обеспечения единственности требуется задать дополнительное условие. В качестве этого условия примем естественное требование непрерывности перемещений в окрестности точек смены граничных условий:

$$w(\mp v_{1,2}\tau \pm \varepsilon, \tau) - w(\mp v_{1,2}\tau \mp \varepsilon, \tau) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (25)$$

Рассмотрим функцию (аналитическое представление)

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(\zeta, \tau) &= \frac{D_{-n-2}(\tau) * \hat{w}(\zeta, \tau)}{\hat{w}_*(\theta)} = \frac{D_{-n-2}(\tau) * D_{n+2}(\tau) * \{\theta^{-1} G_0(\theta) [D_{-n-1}(\tau) * \hat{\sigma}(\zeta, \tau)]\}}{\hat{w}_*(\theta)} = \\ &= \theta^{-1} \frac{G_0(\theta) [D_{-n-1}(\tau) * \hat{\sigma}(\zeta, \tau)]}{\hat{w}_*(\theta)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналитические представления для перемещений и напряжений связаны с функцией $\hat{\Omega}(\zeta, \tau)$:

$$\hat{w}(\zeta, \tau) = D_{n+2}(\tau) * \hat{w}_*(\theta) \hat{\Omega}(\zeta, \tau), \quad \hat{\sigma}(\zeta, \tau) = D_{n+1}(\tau) * \theta \frac{\hat{w}_*(\theta)}{G_0(\theta)} \hat{\Omega}(\zeta, \tau). \quad (27)$$

Формулы (27) и (19) позволяют определить напряжения и перемещения при заданной $\hat{\Omega}(\zeta, \tau)$. Для определения последней используем ее аналитическое представление по скачку при переходе через действительную ось с помощью интеграла типа Коши [4]. С учетом граничных условий (4) можно определить скачок функции $\hat{\Omega}(\zeta, \tau)$ во всех точках действительной оси, за исключением точек $x = -v_1\tau, x = v_2\tau$. Так как при $-v_1\tau < x < v_2\tau$ функция $\hat{w}_*(\theta)^{-1}$ непрерывна при переходе через действительную ось, а при $x < -v_1\tau, x > v_2\tau$, как следует из (10) и (24), функция $\theta^{-1} \times G_0(\theta) / \hat{w}_*(\theta)$ непрерывна при переходе через действительную ось, то скачок $\Delta\Omega(x, \tau)$ функции $\hat{\Omega}(\zeta, \tau)$ на действительной оси определяется так:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega(x, \tau) &= \lim_{y \rightarrow +0} [\hat{\Omega}(\zeta, \tau) - \hat{\Omega}(\bar{\zeta}, \tau)] = \\ &= \begin{cases} \frac{D_{-n-2}(\tau) * f(x, \tau)}{\hat{w}_*(\theta_0)} & (-v_1\tau < x < v_2\tau), \\ \frac{x G_0(\theta) [D_{-n-1}(\tau) * \sigma(x, \tau)]}{\tau \hat{w}_*(\theta_0)} & (x < -v_1\tau, x > v_2\tau). \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

Остается определить возможные скачки функции $\hat{\Omega}(\zeta, \tau)$ в точках $x = -v_1\tau$ и $x = v_2\tau$. Отметим, что доопределение функции скачка в этих точках может оказаться существенным для дальнейшего исследования лишь в том случае, если указанные

точки являются носителями обобщенных функций. Но функция с носителем, сосредоточенным в точке, является линейной формой из производных δ -функции Дирака [4]. Таким образом, при $x = -v_1\tau, v_2\tau$

$$\Delta\Omega(x, \tau) = \sum_{k=0}^m \tau^{k-1} [a_k \delta^{(k)}(x + v_1\tau) + b_k \delta^{(k)}(x - v_2\tau)], \quad (29)$$

где a_k, b_k – неизвестные коэффициенты.

При $\zeta \rightarrow \infty$ для функций \hat{w} и $\hat{\sigma}$ имеют место аналитические представления $\hat{w}(\zeta, \tau) = O(\zeta^{-1}), \hat{\sigma}(\zeta, \tau) = O(\zeta^{-1})$. С учетом $G_0(\theta) = O(\zeta^{-1})$ ($\zeta \rightarrow \infty$), $\hat{w}_*(\theta) = O(1)$ ($\zeta \rightarrow \infty$) из (26) следует $\hat{\Omega}(\zeta, \tau) = O(\zeta^{-1})$ ($\zeta \rightarrow \infty$), а значит, существует аналитическое представление $\hat{\Omega}$ через интеграл типа Коши:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}(\zeta, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\Omega(x, \tau)}{x - \zeta} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-v_1\tau}^{v_2\tau} \frac{D_{-n-2}(\tau) * f(x, \tau)}{\hat{w}_*(\theta_0)(x - \zeta)} dx + \sum_{k=0}^m \tau^{k-1} k! [a_k (\zeta + v_1\tau)^{-(k+1)} + b_k (\zeta - v_2\tau)^{-(k+1)}] \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Искомые перемещения и напряжения теперь можно определить так (требование непрерывности перемещений (25) приводит к равенству $m = n$):

$$\begin{aligned} w(x, \tau) &= \lim_{y \rightarrow +0} [\hat{w}(\zeta, \tau) - \hat{w}(\bar{\zeta}, \tau)], \quad \sigma(x, \tau) = \lim_{y \rightarrow +0} [\hat{\sigma}(\zeta, \tau) - \hat{\sigma}(\bar{\zeta}, \tau)], \\ \hat{w}(\zeta, \tau) &= D_{n+2}(\tau) * \hat{w}_*(\theta) \hat{\Omega}(\zeta, \tau), \quad \hat{\sigma}(\zeta, \tau) = D_{n+1}(\tau) * \theta \frac{\hat{w}_*(\theta)}{G_0(\theta)} \hat{\Omega}(\zeta, \tau), \\ \hat{\Omega}(\zeta, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-v_1\tau}^{v_2\tau} \frac{D_{-n-2}(\tau) * f(x, \tau)}{\hat{w}_*(\theta_0)(x - \zeta)} dx + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n \tau^{k-1} (-1)^k k! [a_k (\zeta + v_1\tau)^{-(k+1)} + b_k (\zeta - v_2\tau)^{-(k+1)}] \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) видно, что решение зависит от $2(n+1)$ произвольных постоянных a_k и b_k . Пусть $n \geq -1$. Как следует из (31), граничное условие $\sigma(x, \tau) = 0$ ($x < -v_1\tau, x > v_2\tau$) выполняется тождественно, независимо от постоянных a_k и b_k . В то же время нормальные перемещения $w(x, \tau)$, построенные с помощью (31) при $-v_1\tau < x < v_2\tau$, от этих постоянных зависят. Поэтому a_k и b_k определяются из формул (31) и граничного условия $w(x, \tau) = f(x, \tau)$ ($-v_1\tau < x < v_2\tau$). При $-v_1\tau < x < v_2\tau$ скачок функции $\hat{w}_*(\theta)$ равен нулю. Учитывая это, из (31) находим

$$\begin{aligned} w(x, \tau) &= \\ &= \begin{cases} f(x, \tau) + \frac{x\sqrt{v_1v_2}}{2\pi(n+1)!} \sum_{k=0}^n b_k \int_0^{\tau} (\tau-t)^{n+1} \frac{\tau^{k-1} \delta^{(k)}(x - v_2t)}{\sqrt{(t+v_1x)(x-v_2t)}} dt & (0 < x < v_2\tau), \\ f(x, \tau) + \frac{x\sqrt{v_1v_2}}{2\pi(n+1)!} \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{\tau} (\tau-t)^{n+1} \frac{\tau^{k-1} \delta^{(k)}(x + v_1t)}{\sqrt{(t+v_1x)(x-v_2t)}} dt & (-v_1\tau < x < 0). \end{cases} \end{aligned} \quad (32)$$

Так как интегралы в правых частях (32) не определены, то для обеспечения выполнения граничного условия $w(x, \tau) = f(x, \tau)$ ($-v_1\tau < x < v_2\tau$) необходимо положить $a_k = b_k = 0, k = \bar{0}, n$. Разрешающие задачу соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned}
w(x, \tau) &= \lim_{y \rightarrow +0} [\hat{w}(\zeta, \tau) - \hat{w}(\bar{\zeta}, \tau)], \quad \sigma(x, \tau) = \lim_{y \rightarrow +0} [\hat{\sigma}(\zeta, \tau) - \hat{\sigma}(\bar{\zeta}, \tau)], \\
\hat{w}(\zeta, \tau) &= D_{n+2}(\tau) * \hat{w}_*(\theta) \hat{\Omega}(\zeta, \tau), \quad \hat{\sigma}(\zeta, \tau) = D_{n+1}(\tau) * \theta \frac{\hat{w}_*(\theta)}{G_0(\theta)} \hat{\Omega}(\zeta, \tau), \\
\hat{\Omega}(\zeta, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-v_1\tau}^{v_2\tau} \frac{D_{-n-2}(\tau) * f(x, \tau)}{\hat{w}_*(\theta_0)(x - \zeta)} dx \right).
\end{aligned} \tag{33}$$

Построенные формулы (33) дают решение поставленной задачи в случае, если скорости движения границ области контакта v_1 и v_2 не превышают скорость распространения волн Рэлея c_R .

Заключение

Предложен способ аналитического решения плоских нестационарных контактных задач с подвижными границами области взаимодействия для абсолютно твердых выпуклых штампов и упругого полупространства. Получены разрешающие формулы для дорэлеевского случая движения границ области контакта.

Список литературы

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. *Динамические контактные задачи с подвижными границами*. М.: Физматлит, 1995. 352 с.
2. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями*. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
3. Поручиков В.Б. *Методы динамической теории упругости*. М.: Наука, 1986. 328 с.
4. Слепян Л.И., Яковлев Ю.С. *Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики*. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.
5. Игумнов Л.А., Окочников А.С., Тарлаковский Д.В., Белов А.А. Гранично-элементный анализ волн на упругом, пористо- и вязкоупругом полупространствах. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Т. 75. №2. С. 145–151.
6. Игумнов Л.А., Аменицкий А.В., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н. Численно-аналитическое исследование динамики вязко- и пористо-упругих тел. *Прикладная механика и техническая физика*. 2014. Т. 55. №1 (323). С. 108–114.
7. Баландин В.В., Брагов А.М., Игумнов Л.А., Константинов А.Ю., Котов В.Л., Ломунов А.К. Динамическое деформирование мягких грунтовых сред: экспериментальные исследования и математическое моделирование. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2015. №3. С. 69–77.
8. Котов В.Л., Баландин В.В., Ломунов А.К. Оценка эффектов поверхностного трения при нестационарном контакте элементов конструкций с песчаным грунтом. *Проблемы прочности и пластичности*. 2010. Вып. 72. С. 137–141.
9. Mikhailova E. Yu., Fedotenkov G. V. Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (Initial stage of interaction). *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46. No 2. P. 239–247. DOI: 10.3103/S0025654411020129.
10. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства [Электронный документ]. *Труды МАИ*. 2014. №78. (<http://www.mai.ru/upload/iblock/540/540b786eac60d751a2e5f5b8f745d731.pdf>)
11. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries. *Journal of Mathematical Sciences*. 2009. Vol. 162. No 2. P. 246–253. DOI: 10.1007/s10958-009-9635-4.
12. Игумнов Л.А., Марков И.П., Пазин В.П., Ипатов А.А. Гранично-элементное построение решений для трехмерной матрицы Грина. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Т. 75. №2. С. 123–130.

13. Levi G.Yu., Igumnov L.A. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function. *Materials physics and mechanics*. St.Petersburg: Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS. 2015. Vol. 23. No 1. P.42–46.

14. Амар Абдул Карим Салман, Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Удар деформируемым цилиндрическим телом по упругому полупространству. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2004. № 3. С. 82–90.

15. Suvorov Ye.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76. No 5. P. 511–518. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.

16. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014. Vol. 43. No 2. P. 145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.

17. Igumnov L.A., Belov A.A., Petrov A.N. Boundary-element modeling of the dynamics of elastic and viscoelastic bodies and media. *Advanced materials – studies and application*. Nova Science Publishers. 2015. P. 301–318.

18. Igumnov L.A., Markov I.P., Amenitsky A.V. A three-dimensional boundary element approach for transient anisotropic viscoelastic problems. *Key Engineering Materials*. 2014. Vol. 685. P. 267–271.

References

1. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granitsami* [Dynamic contact problems with moving boundaries]. Moscow. Nauka Fizmatlit Publ. 1995. 352 p. (In Russian).

2. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integral'nykh uravneniy i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoy dinamicheskoy teorii uprugosti s sopryazhennymi polyami* [Methods of boundary integral equations and boundary element in solving the problems of three-dimensional dynamic theory of elasticity with paired fields]. Moscow. Nauka Fizmatlit Publ. 2008. 352 p. (In Russian).

3. Poruchikov V.B. *Metody dinamicheskoy teorii uprugosti* [Methods of dynamic elasticity theory]. Moscow. Nauka Publ. 1986. 328 p. (In Russian).

4. Slepian L.I., Iakovlev Iu.S. *Integral'nye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh mekhanik* [Integral transformations in non-stationary problems of mechanics]. Leningrad. Sudostroenie Publ. 1980. 344 p. (In Russian).

5. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Belov A.A. Granichno-elementnyy analiz voln na uprugom, poristo- i vyazkouprugom poluprostranstvakh [Boundary-element analysis of waves over elastic poro- and viscoelastic half-spaces]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of strength and plasticity]. 2013. Vol. 75. No 2. P. 145–151 (In Russian).

6. Igumnov L.A., Amenitskii A.V., Belov A.A., Litvinchuk S.Y., Petrov A.N. Chislennanaliticheskoe issledovanie dinamiki vyazko- i poristo-uprugikh tel [Numerical-analytic investigation of the dynamics of viscoelastic and porous elastic bodies]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of applied mechanics and technical physics] 2014. Vol. 55. No 1 (323). P. 89–94 (In Russian).

7. Balandin V.V., Bragov A.M., Igumnov L.A., Konstantinov A.Y., Kotov V.L., Lomunov A.K. Dinamicheskoe deformirovanie myagkikh gruntovykh sred: eksperimental'nye issledovaniya i matematicheskoe modelirovanie [Dynamic deformation of soft soil media: Experimental studies and mathematical modeling]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 2015. No 3. P. 69–77 (In Russian).

8. Kotov V.L., Balandin V.V., Lomunov A.K. Otsenka effektivov poverkhnostnogo treniya pri nestatsionarnom kontakte elementov konstruktivnykh s peschanykh gruntom. [Assessing the effects of surface friction in non-stationary contact of structural elements with sand soil]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of strength and plasticity]. 2010. Vol. 72. P. 137–141 (In Russian).

9. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction). *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46. No 2. P. 239–247. DOI: 10.3103/S0025654411020129.

10. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Nestatsionarnyy kontakt sferi-

cheskoy obolochki i uprugogo poluprostranstva [Non-stationary contact spherical shell and an elastic half-space]. *Trudy MAI [Proceedings of Moscow Aviation Institute (MAI)]*. 2014. No 78. (<http://www.mai.ru/upload/iblock/540/540b786eac60d751a2e5f5b8f745d731.pdf>) (In Russian).

11. Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries. *Journal of Mathematical Sciences*. 2009. Vol. 162, No 2. P. 246–253. DOI: 10.1007/s10958-009-9635-4.

12. Igumnov L.A., Markov I.P., Pazin V.P., Ipatov A.A. Granichno-elementnoe postroenie resheniy dlya trekhmernoy matritsy Grina [Boundary-element construction of solutions for a 3d green's]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of strength and plasticity]*. 2013. Vol. 75. No 2. P. 123–130 (In Russian).

13. Levi G.Yu., Igumnov L.A. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function. *Materials physics and mechanics*. St. Petersburg. Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS. 2015. Vol. 23. No 1. P. 42–46.

14. Amar Abdul Karim Salman, Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Udar deformiruemyim tsilindricheskim telom po uprugomu poluprostranstvu [Beat the deformable cylindrical body on elastic half-space]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]* 2004. No 3. P. 82–90 (In Russian).

15. Suvorov Ye.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76. No 5. P. 511–518. DOI 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.

16. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2014. Vol. 43. No 2. P. 145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.

17. Igumnov L.A., Belov A.A., Petrov A.N. Boundary-Element Modeling of the Dynamics of Elastic and Viscoelastic Bodies and Media. *Advanced Materials – Studies and Application. Nova Science Publishers*. 2015. P. 301–318.

18. Igumnov L.A., Markov I.P., Amenitsky A.V. A three-dimensional boundary element approach for transient anisotropic viscoelastic problems. *Key Engineering Materials*. 2014. Vol. 685. P. 267–271.

NONSTATIONARY CONTACT PROBLEM FOR SMOOTH RIGID DIE AND ELASTIC HALF PLANE ON SUB-RAYLEIGH INTERVAL OF INTERACTION

Lomunov A.K.¹, Prjazhevskij R.D.², Fedotenkov G.V.²

¹*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation,*

²*Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russian Federation*

Within the flat statement non-stationary problem of the contact interaction of an absolutely rigid die bounded by a smooth convex curve, with elastic half-plane is considered. The law of motion of the die assumed to be known. Problem statement includes the equations of the plane theory of elasticity in the potentials of elastic displacements, equations relating the potentials of the displacements and stresses, the initial conditions and the boundary conditions of mixed type. It is assumed that the contact is frictionless. On the basis of the principle of superposition, the normal movement of the half-plane boundaries are represented by the convolution of the normal stress with the influence function. The influence function is a solution of Lamb's problem. The method of solution is based on the introduction of analytic representations of the unknown functions and applying analytical algorithm of joint inverse of integral transformations of Fourier-Laplace. It is essential to the function that described by the die movement was homogeneous. In the case of movement of the contact region boundaries with speed not exceeding the speed of Rayleigh wave propagation the analytical relations, permitting the task are obtained.

Keywords: nonstationary contact problems of the theory of elasticity, mixed boundary conditions, moving boundary of the contact area, principle of superposition, integral transforms, generalized functions, analytical representations.