

УДК 629.7

## СТРУКТУРНАЯ МОДИФИКАЦИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПО УСЛОВИЯМ ЖЕСТКОСТИ

**А.В. Болдырев***Самара*

Рассматривается задача повышения жесткости тонкостенных конструкций с использованием трехмерных моделей твердого деформируемого тела переменной плотности. Приводятся численные примеры.

Задача повышения жесткости конструкции может ставиться на всех стадиях проектирования, в том числе и на этапе, когда уже определена структура упругой системы по условиям прочности. Целью модификаций при этом обычно является повышение критических скоростей летательного аппарата, улучшение эксплуатационных свойств изделия и т.п. В монографии [1] рассмотрен ряд задач оптимизации элементов авиационных конструкций при разнообразных функциональных ограничениях, включая ограничения на жесткость упругих систем. В работе [2] предложен метод оптимизации распределения материала в несущих поверхностях по требованиям жесткости при фиксированной силовой схеме. В то же время в работе [3] показано, что варьирование размеров сечений элементов конструкции для парирования недостаточной жесткости в некоторых задачах малоэффективно по сравнению с введением в конструкцию дополнительных элементов, то есть за счет модификации силовой схемы конструкции.

Выбор силовой схемы конструкции заключается в определении количества и типа основных силовых элементов, их расположения в пространстве и способов соединения между собой. Это плохо формализуемая задача, так как уже на этапе ее постановки затруднительно предложить такое пространство проектных переменных, разным численным значениям которых соответствовали бы различные структурные решения. На практике задачи структурной оптимизации зачастую решаются интуитивно, с использованием удачных прототипов и накопленного опыта. В данной статье предлагается развитие алгоритмического подхода [3] к формированию силовой схемы, учитывающее требования по жесткости конструкции в форме ограничений на обобщенные перемещения.

### 1. Постановка задачи

Введем в рассмотрение, следуя [3–5], гипотетическую упругую трехмерную изотропную среду переменной плотности  $\rho$ . Будем считать, что ее модуль упругости  $E$  и прочностные характеристики пропорциональны плотности:

$$E = \rho \bar{E}, \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = \rho \bar{\sigma}, \quad (2)$$

где  $\bar{\sigma}$  – допускаемое напряжение материала;  $\bar{E}$  и  $\bar{\sigma}$  – модуль упругости и допускаемое напряжение при единичной плотности.

Предположим, что имеется конструкция, которая нуждается в улучшении. Будем называть ее основной. Присоединим к ней в технологически перспективных местах трехмерную среду переменной плотности с учетом геометрических ограничений на ее форму и расположение, то есть только в допустимой по компоновочным соображениям области конструкции объемом  $V$ . Эту среду будем называть "заполнитель". Разобьем объем  $V$  на  $n$  достаточно малых трехмерных конечных элементов и примем плотность материала  $\rho$  в элементах за переменные проектирования при фиксированных величинах  $\bar{E}$  и  $\bar{\sigma}$ . Потенциально заполнитель содержит внутри себя все мыслимые варианты модификации силовой схемы проектируемой конструкции, которые могут быть образованы сгустками материала переменной плотности внутри допустимой геометрической области.

Перемещения узлов конечно-элементной модели (КЭМ) основной конструкции и заполнителя  $\{u\}$  под нагрузкой  $\{P\}$  определяются путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$[K]\{u\} = \{P\}, \quad (3)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости конструкции с заполнителем.

Обобщенное перемещение конструкции с заполнителем представим в следующем виде:

$$C = \{Q\}^T \{u\}, \quad (4)$$

где  $\{Q\}$  – вектор коэффициентов линейной комбинации перемещений узлов КЭМ. В качестве обобщенного перемещения могут выступать перемещение какой-либо точки конструкции в определенном направлении, относительные смещения различных точек, углы закручивания сечений и т.п.

Задача оптимизации распределения материала в заполнителе может быть сформулирована в терминах нелинейного математического программирования. Поставим цель минимизировать массу заполнителя

$$m = \sum_{i=1}^n \rho_i V_i \quad (5)$$

при выполнении функционального ограничения

$$g(\rho) = C(\rho) - \bar{C} = 0 \quad (6)$$

и ограничений на значения проектных переменных:

$$\rho_i \geq \rho_i^{\min} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

где  $i$  – номер элемента заполнителя;  $\rho_i$ ,  $V_i$  – соответственно плотность и объем  $i$ -го элемента заполнителя;  $\bar{C}$  – допускаемое значение обобщенного перемещения  $C$ ;  $\rho_i^{\min}$  – малая положительная величина. Проектные переменные называются активными, если соотношения (7) выполняются в форме строгого неравенства [6]. Для пассивных проектных переменных соотношения (7) являются равенствами.

Заметим, что выбор величины  $\rho_i^{\min}$  в контексте данной задачи определяется необходимостью устранить возможность появления вырожденности или плохой обусловленности матрицы жесткости  $[K]$  при варьировании проектных переменных и связанных с ними модулей упругости материала элементов заполнителя.

Запишем функцию Лагранжа в следующем виде:

$$L(\rho) = m(\rho) + \lambda C(\rho), \quad \lambda > 0,$$

где  $\lambda$  – неопределенный множитель Лагранжа. Условия стационарности этой функции

$$\frac{\partial L(\rho)}{\partial \rho_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_1)$$

с учетом того, что  $\partial m / \partial \rho_i = V_i$ , записываются так:

$$-\frac{\partial C / \partial \rho_i}{V_i} = \frac{1}{\lambda} = \text{const} \quad (i = 1, 2, \dots, n_1), \quad (8)$$

где  $n_1$  – количество активных проектных переменных.

Соотношение (8) является критерием оптимальности задачи (5)–(7), согласно которому частные производные обобщенного перемещения  $C$  по массе заполнителя должны быть одинаковыми для всех активных проектных переменных. Отметим, что объем элементов заполнителя  $V_i$  в процессе оптимизации не изменяется.

## 2. Анализ чувствительности обобщенного перемещения

Определим значения производных, входящих в соотношения (8). В дальнейших рассуждениях вектор  $\{Q\}$  будем рассматривать как виртуальную нагрузку конструкции. Тогда согласно (4) обобщенное перемещение  $C$  является работой виртуальной нагрузки  $\{Q\}$  на действительных перемещениях  $\{u\}$ . В случае ограничения на перемещение какого-либо узла КЭМ вектор  $\{Q\}$  представляет единичную силу в направлении нежелательного перемещения, в случае ограничения угла закручивания сечения – единичный момент к плоскости сечения и т.д.

Решив систему уравнений

$$[K]\{u^{(q)}\} = \{Q\},$$

определим виртуальные перемещения  $\{u^{(q)}\}$ . Дадим бесконечно малое приращение количеству материала (а следовательно, и жесткости)  $i$ -го элемента. При этом в сплошной среде (1), (2) изменятся перемещения и внутренние усилия как для виртуальной, так и для действительной нагрузки. Новое значение  $C$  можно определить в предположении неизменности внутренних усилий. Если к усилиям исходной системы добавить самоуравновешенные приращения сил (напряжений), которые обеспечивают выполнение условий совместности деформаций, то в соответствии с принципом возможных изменений напряжений [7] эти приращения не изменят вычисленного нового значения  $C$  [8]. Таким образом, правильность результатов дифференцирования величины  $C$  при фиксированных величинах внутренних усилий обеспечивается ее стационарностью по отношению к распределению внутренних усилий.

Дифференцирование (4) по  $\rho_i$  с учетом того, что  $\{Q\}$  не зависит от  $\rho_i$ , приводит к следующему соотношению:

$$\partial C / \partial \rho_i = \{Q\}^T \partial \{u\} / \partial \rho_i. \quad (9)$$

Продифференцируем (3) по  $\rho_i$ :

$$\partial [K] / \partial \rho_i \{u\} + [K] \partial \{u\} / \partial \rho_i = \{0\}. \quad (10)$$

Выражение (10) умножим слева на вектор  $\{u^{(q)}\}^T$ :

$$\{u^{(q)}\}^T \partial [K] / \partial \rho_i \{u\} + \{u^{(q)}\}^T [K] \partial \{u\} / \partial \rho_i = \{0\}.$$

Так как  $\{u^{(q)}\}^T [K] = \{Q\}^T$ , получаем

$$\{Q\}^T \partial \{u\} / \partial \rho_i = -\{u^{(q)}\}^T \partial [K] / \partial \rho_i \{u\}. \quad (11)$$

Соотношение (11) с учетом (9) принимает следующий вид:

$$\partial C / \partial \rho_i = -\{u^{(q)}\}^T \partial [K] / \partial \rho_i \{u\}. \quad (12)$$

В данной работе используется материал заполнителя (1), (2), для которого имеет место линейная зависимость коэффициентов матриц жесткости элементов от  $\rho_i$ . При этом

$$\partial [K] / \partial \rho_i = [A_i]^T [K] [A_i] / \rho_i, \quad (13)$$

где  $[A_i]$  – булева матрица перехода от матрицы жесткости  $i$ -го элемента к глобальной матрице.

Зависимость (12) с учетом (13) преобразуется к виду:

$$\partial C / \partial \rho_i = -\{u^{(q)}\}^T [A_i]^T [K] [A_i] \{u\} / \rho_i. \quad (14)$$

В числителе соотношения (14) записана работа внутренних усилий  $i$ -го элемента заполнителя  $[K][A_i]\{u\}$  на возможных перемещениях узлов  $i$ -го элемента заполнителя  $\{u^{(q)}\}^T [A_i]^T$ .

### 3. Оптимизация распределения материала

Для целей данной работы используем алгоритм, представленный на рис. 1.

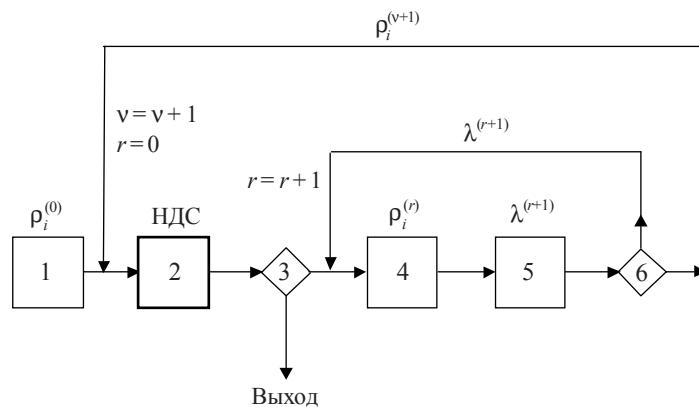


Рис. 1

Первоначально задается исходное распределение материала  $\rho_i^{(0)}$  по всем элементам заполнителя (блок 1). Движение в области поиска осуществляется на основе

последовательного чередования "пробных" и "рабочих" шагов. В результате ряда "пробных" шагов определяется значение множителя Лагранжа  $\lambda$ . "Рабочий" шаг характеризуется тем, что для него выполняется анализ напряженно-деформированного состояния конструкции (блок 2). Предварительно все проектные переменные включаются в разряд активных и задается начальное положительное значение для множителя Лагранжа, например  $\lambda^{(0)} = 1$ . Значения проектных переменных на этапе "пробных" шагов определяются на основе следующих рекуррентных соотношений (блок 4):

$$\rho_i^{(r)} = \rho_i^{(v)} \left( -\frac{\partial C / \partial \rho_i}{V_i} \lambda \right)^{1/2} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где  $v$  – номер "рабочего" шага,  $r$  – номер "пробного" шага. Если для  $i$ -й проектной переменной при этом нарушается ограничение (7) или получено положительное значение частной производной  $\partial C / \partial \rho_i$ , то для этой переменной принимается значение  $\rho_i^{\min}$ .

На этапе "пробных" шагов строятся линейные аппроксимации функционального ограничения на основе следующего соотношения:

$$C^{(r)} = C^{(v)} + \sum_{i=1}^n \partial C^{(v)} / \partial \rho_i (\rho_i^{(r)} - \rho_i^{(v)}).$$

Далее назначается новое значение множителя Лагранжа (блок 5):

$$\lambda^{(r+1)} = \lambda^{(r)} C^{(r)} / \bar{C}.$$

Расчеты в блоках 4 и 5 повторяются до сходимости по условию (6). После достижения сходимости или исчерпания возможного числа итераций для внутреннего цикла полученные значения проектных переменных принимаются в качестве исходных и блок 6 передает их в блок 2 для определения нового распределения внутренних усилий в основной конструкции и заполнителе. Вычислительный процесс во внешнем цикле прекращается, если текущий шаг в области поиска стал достаточно малым [9] или исчерпано заданное число итераций (блок 3). Отметим, что сходимости алгоритма, основанного на приеме линеаризации перемещений узлов КЭМ при изменении значений проектных переменных, может способствовать свойство консерватизма внутренних усилий в конструкциях [7].

Вариации проектных переменных в соответствии с данным алгоритмом выделяют в трехмерном заполнителе элементы, обеспечивающие требуемое повышение жесткости упругой системы. Анализ распределения материала и основных путей передачи сил в заполнителе при виртуальной и действительной нагрузке с учетом конструктивных и технологических требований позволяет разработать рациональные варианты модификации силовой схемы основной конструкции с использованием стратегии [4].

Для исследовательских целей алгоритм реализован на языке Femap Basic Script [10]. Вычисления напряженно-деформированного состояния конструкции с заполнителем производились в среде NASTRAN.

#### 4. Численные примеры

Для испытания работоспособности и перспективности намеченного подхода к модификации недостаточно жестких конструкций сначала рассмотрим решение

нескольких модельных задач о кручении тонкостенных стержней. Известно, что тонкостенные стержни с открытым профилем имеют крайне малую крутильную жесткость, и замыкание контура приводит к значительно более жесткой конструкции [7].

Рассмотрим открытый профиль с толщиной материала 10 мм. Крутящая нагрузка прикладывалась по торцам основной конструкции в виде пары сил (по 10 кН каждая) (рис. 2). Тонкостенный стержень моделировался пластинчатыми элементами, наполнитель – трехмерными. Характеристики конструкционного материала основной конструкции:  $E = 72000$  МПа,  $\rho = 2860$  кг/м<sup>3</sup>,  $\bar{\sigma} = 400$  МПа, коэффициент Пуассона 0,3. Угол закручивания торцевого сечения тонкостенного стержня составил 0,252 рад. Заполнитель размещался как внутри, так и снаружи профиля и соединялся с основной конструкцией по всем контактным поверхностям.

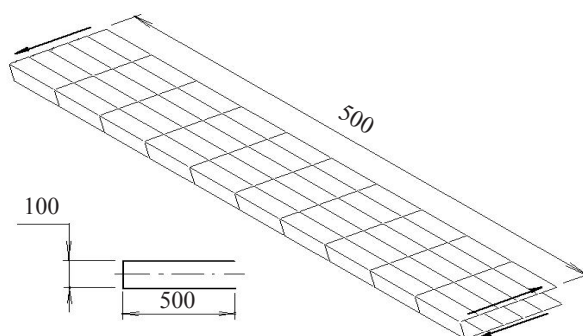


Рис. 2

Была поставлена задача найти оптимальное распределение материала в наполнителе, при котором угол закручивания концевое сечения основной конструкции с наполнителем не превышает 0,1 рад. В результате десяти итераций предложенного алгоритма получен допустимый проект.

На рис. 3, а, б, в, г показано распределение плотностей в поперечном сечении наполнителя, полученное соответственно после первой, второй, третьей и десятой итерации.

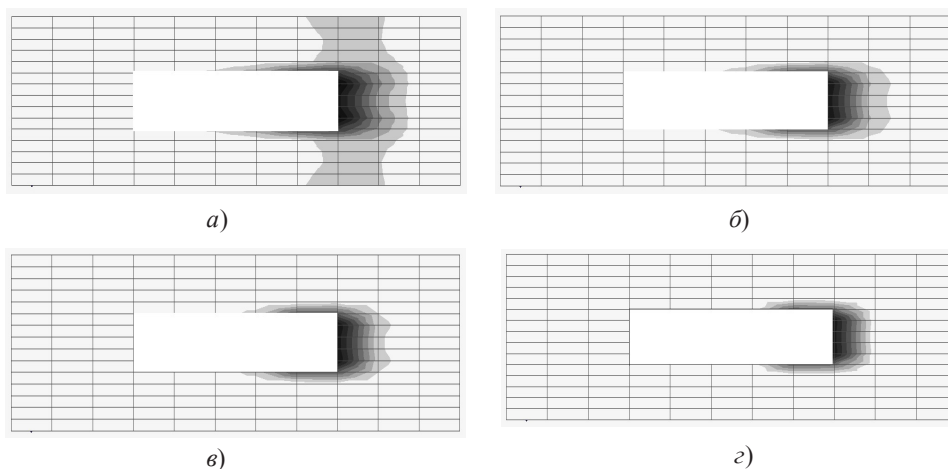


Рис. 3

Для удобства анализа наполнитель внутри профиля не показан. Зоны высоких значений плотностей в наполнителе уверенно указывают на целесообразность замыкания рассмотренного профиля. Подобные результаты были получены также и для круговых открытых профилей с сектором выреза 90 и 180°. Таким образом, возможность алгоритмического решения данной инженерной задачи получила определенное подтверждение.

Далее была рассмотрена задача повышения жесткости крыла самолета (рис. 4), спроектированного по условиям прочности. Воздушная нагрузка соответствует полету самолета в неспокойном воздухе с максимальной перегрузкой 3,0. Для трехлонжеронного крыла с относительным удлинением 12, сужением 3 и углом стреловидности 10° [1] использован суперкритический профиль с относительной строительной высотой 13,5% в бортовом сечении и 9% в концевом сечении. Характеристики конструкционного материала такие же, как в предыдущем примере. Угол закручивания концевой части крыла  $\alpha$  составил  $-0,251$  рад.

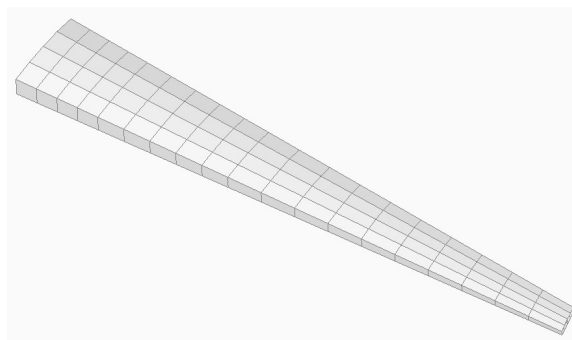


Рис. 4

Рассмотрим задачу определения рациональной силовой схемы конструкции с учетом ограничения на обобщенное перемещение: абсолютная величина угла  $\alpha$  не должна превышать 0,125 рад. Внутри теоретического контура крыла поместим трехмерную модель наполнителя, содержащую пять слоев вдоль строительной высоты крыла. Присоединим наполнитель к основной конструкции по всем контактным поверхностям.

Расчеты по предложенному алгоритму показывают следующее. За 17 шагов внешнего цикла алгоритма получен допустимый проект с массой наполнителя 9,3% от массы основной конструкции. Значения плотностей в наружных слоях наполнителя на порядок превышают значения плотностей в срединных слоях модели. На рис. 5, а, б показано распределение плотностей наполнителя соответственно в наружном и срединном слоях трехмерной модели в концевой части крыла.

Для выявления основных путей передачи сил в наружных слоях наполнителя, расположенных на максимальном расстоянии от срединной поверхности крыла, используем в каждом элементе главные напряжения. Умножение их на толщину трехмерного элемента внешнего слоя наполнителя дает потоки усилий, которые также будем называть главными. Потоки главных усилий в наполнителе изобразим на схеме модели так: направление стрелок и их ориентацию в каждом элементе сохраним такими же, как у главных напряжений, а длину стрелок назначим пропорционально значениям потоков усилий.

Дополнительный материал в наружных слоях заполнителя размещен в концевой зоне крыла между средним и задним лонжеронами (рис. 5,а). На рис. 5,б показано распределение потоков главных усилий в нижнем слое заполнителя при виртуальной нагрузке (единичный момент, приложенный в плоскости концевой сечения крыла). В зоне сгустка материала преобладает одноосное напряженное состояние, что можно трактовать как необходимость установки в панелях крыла в этом направлении стержневых элементов для эффективного увеличения жесткости основной конструкции. В случае применения для панелей крыла композиционного материала целесообразно в силовой схеме конструкции использовать слой материала с соответствующей ориентацией волокон.

Анализ работы материала в срединных слоях, расположенных между внешними слоями, удобно выполнять с использованием картины главных касательных сил [4]. Для визуального анализа главные касательные силы изобразим как векторы в центре масс соответствующего элемента на виде крыла в плане (рис. 5,г). Из анализа картин распределения плотностей материала и главных касательных сил в срединных слоях заполнителя отчетливо следует вывод о возможности повышения жесткости исходного крыла за счет усиления стенки заднего лонжерона.

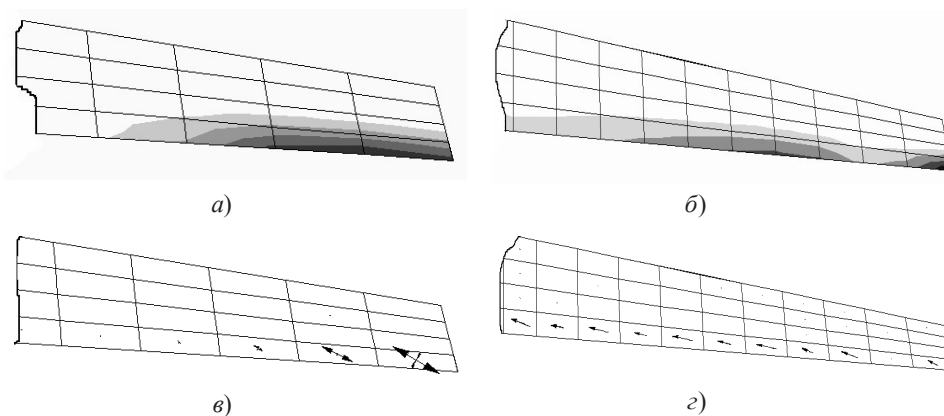


Рис. 5

Таким образом, результаты решения инженерных задач демонстрируют работоспособность алгоритма оптимизации распределения материала в континуальной среде переменной плотности. Предложенный подход может дать информацию для обоснованного изменения силовой схемы конструкции с целью парирования недостаточной жесткости с учетом особенностей геометрической формы конструкции и граничных условий.

**Ключевые слова:** жесткость, тонкостенные конструкции, трехмерная модель, твердое деформируемое тело переменной плотности.

#### Литература

1. Методы оптимизации авиационных конструкций / Н.В. Баничук [и др.] – М.: Машиностроение, 1989. – 296 с.
2. Данилин, А.И. Применение алгоритма проектирования с учетом требований жесткости / А.И. Данилин, В.А. Комаров // Автоматизация проектирования авиационных конструкций. – Куйбышев: КуАИ, 1982. – С. 116–123.



3. *Комаров, В.А.* Повышение жесткости конструкций топологическими средствами / В.А. Комаров // Вестник СГАУ. – 2003. – №1. – С. 24–37.
4. *Комаров, В.А.* Проектирование силовых схем авиационных конструкций / В.А. Комаров // Актуальные проблемы авиационной науки и техники. – М.: Машиностроение, 1984. – С. 114–129.
5. *Комаров, А.А.* Основы проектирования силовых конструкций / А.А. Комаров. – Куйбышев: Куйбышевск. книж. изд-во, 1965. – 82 с.
6. Новые направления оптимизации в строительном проектировании / М.С. Андерсон [и др.]. – М.: Стройиздат, 1989. – 592 с.
7. *Филин, А.П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. II / А.П. Филин. – М.: Наука, 1978. – 616 с.
8. *Комаров, В.А.* К доказательству теоремы об изменении жесткости конструкций / В.А. Комаров // Вестник СГАУ. – 2004. – №1. – С. 49–51.
9. *Измаилов, А.Ф.* Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с.
10. *Рычков, С.П.* MSC.visualNastran для Windows / С.П. Рычков. – М.: НТ Пресс, 2004. – 552 с.

[13.10.2008]

## STRUCTURAL MODIFICATION OF THIN-WALLED STRUCTURES WITH RIGIDITY OBJECTIVE

**A.V. Boldyrev**

The problem of increasing the rigidity of thin-walled structures using 3-dimensional models of deformable solids of a variable density is studied. Numerical examples are presented.

**Key words:** rigidity, thin-walled structures, three-dimensional model, deformable solid of a variable density.