

УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ РАСЧЕТ ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ^{*)}

А.А. Белов

Нижний Новгород

Представлены результаты расчетов динамического состояния вязкоупругих тел на основе метода граничных элементов в сочетании с методами квадратур свертки и Дурбина. Решение вязкоупругих краевых задач в трехмерной постановке в явном времени организовано без использования шаговых процедур.

Введение

Нестационарные динамические задачи теории вязкоупругости могут быть решены методом граничных интегральных уравнений (ГИУ). Применение метода граничных элементов (МГЭ) для расчета динамики составных вязкоупругих тел и решения контактных задач вызвано стремлением избежать трудностей построения соответствующих сеточных контактных алгоритмов.

Представлены два подхода: использование МГЭ совместно с преобразованием Лапласа и методом Дурбина при неравномерной кусочно-квадратичной аппроксимации спектральной функции и использование МГЭ в явном времени в рамках классического метода квадратур свертки [1].

1. Гранично-элементное моделирование

Детали редукции исходной начально-краевой задачи трехмерной теории вязкоупругости к эквивалентной системе разрешающих ГИУ можно найти в [2, 3]:

$$c_{lj}(x)\bar{u}_j(x,p) + \int_{\Gamma} T_{lj}(x,y,p)\bar{u}_j(y,p)d_yS = \int_{\Gamma} U_{lj}(x-y,p)\bar{t}_j(y,p)d_yS, \quad (1)$$

$$p = \alpha + i\omega,$$

$$c_{lj}(x)u_j(x,t) + \int_0^t \int_{\Gamma} T_{lj}(x,y,t-\tau)u_j(y,\tau)d_ySd\tau =$$

$$= \int_0^t U_{lj}(x-y,t-\tau)t_j(y,\tau)d_ySd\tau, \quad l=1,2,3, \quad x \in \Gamma, \quad (2)$$

где U_{lj} и T_{lj} – соответственно изображения по Лапласу или оригиналы компонент тензоров фундаментальных и сингулярных решений.

^{*)} Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки (грант Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-3367.2008.8).

Уравнения (1), (2) позволяют разработать эффективные численные методики для определения неизвестных функций [2, 3].

Для численного обращения решения ГИУ (1) использован алгоритм, предложенный Дурбином [4, 5]:

$$F_k = \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)], \quad G_k = \operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)], \quad \Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k,$$

$$f(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(F_k + F_{k+1})\Delta_k}{2\pi},$$

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta_k} (\cos(\omega_{k+1}t) - \cos(\omega_k t)) - \frac{G_{k+1} - G_k}{\Delta_k} (\sin(\omega_{k+1}t) - \sin(\omega_k t)) \right].$$

Для решения ГИУ (2) применен метод квадратур свертки [6, 7]:

$$y(t) = \int_0^t q(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{\Re^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{q} \left(\gamma(\Re e^{i2\pi l}) / \Delta t \right) e^{-inl2\pi L^{-1}},$$

$$\alpha_k x_{n+k} + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + \alpha_0 x_n =$$

$$= \Delta t [\beta_k (sx_{n+k} + g((n+k)\Delta t)) + \dots + \beta_0 (sx_n + g(n\Delta t))],$$

$$\gamma(z) = \frac{\alpha_0 z^k + \dots + \alpha_k}{\beta_0 z^k + \dots + \beta_k}, \quad x(t, s) = \int_0^t e^{s(t-\tau)} g(\tau) d\tau.$$

Для численного расчета трехмерной задачи с гранично-элементной стратегией дискретизации построение системы ГИУ необходимо дополнить контактными соотношениями.

2. Визуализация результатов гранично-элементных расчетов

Инструментарий графической визуализации результатов гранично-элементных расчетов разработан на языке C++ (реализация Microsoft Visual C) с использованием библиотеки MFC для создания интерфейса и библиотеки OpenGL для построения трехмерных изображений.

Программа позволяет формировать полутоновые или многоцветные изображения конструкций, сеточную геометрию, физические поля в различные моменты времени.

Исходными данными для решения поставленной проблемы являются сеточная модель объекта проектирования, полученная из расчетных систем, и значения вектор-функции $F(x, y, z, t)$, заданные на этой модели в различные моменты времени. Геометрическая модель объекта представляет собой набор из топологически четырехугольных поверхностей, каждая из которых аппроксимируется регулярной разностной сеткой из четырехугольных ячеек.

При наличии плоскостей симметрии можно рассматривать лишь сектор объекта.

Программа позволяет размножить загруженный объект путем отображения его относительно плоскостей симметрии.

3. Гранично-элементные расчеты

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы $P(t) = 1000 \text{ Н/м}^2$ на площадь $1 \times 1 \text{ м}^2$ на поверхности полупространства. Исследуемая точка находится на расстоянии 15 м от источника воздействия силы. Параметры материала полупространства: $E = 2,5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,298$, $\rho = 1884 \text{ кг/м}^3$.

Четверть дискретной модели состоит из 864 элементов и 913 точек. На рис. 1 представлены расчеты по двум методам и дано сравнение с решением, приведенным в [1]. Цифрой 1 отмечены кривые, полученные методом Дурбина и методом квадратур сверток, цифрой 2 – решение из [1].

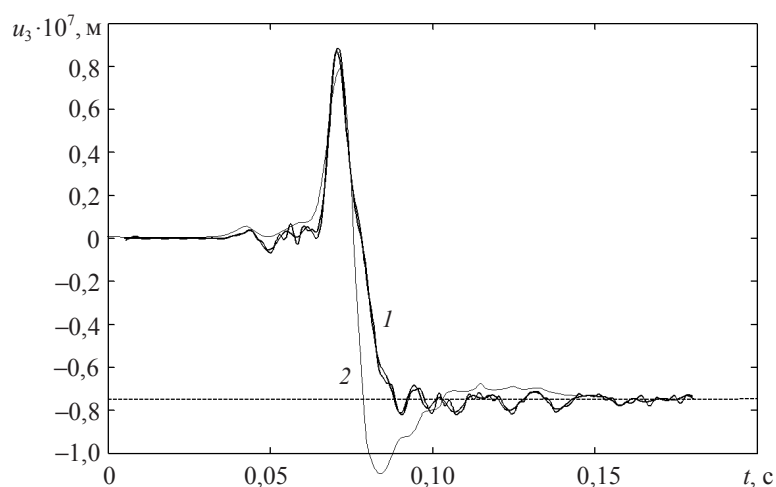


Рис. 1

Рассмотрим задачу о действии силы

$$P(t) = \begin{cases} 1 \text{ Н/м}^2, & 0 < t < 0,0085, \\ 0, & t > 0,0085, \end{cases}$$

на поверхность вязкоупругого штампа $2 \times 2 \times 2 \text{ м}^3$, расположенного на вязкоупругом полупространстве. Четверть равномерной сетки штампа содержит 96 ГЭ, а четверть ГЭ-сетки дневной поверхности полупространства – 432 четырехугольных элемента. Параметры материалов: штамп – $E = 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,2$, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, полупространство – $E = 1,38 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,35$, $\rho = 1966 \text{ кг/м}^3$. В качестве координат исследуемой точки взяты значения (2,33; 2,33; 0). За начало координат выбран центр контактной грани штампа. На рис. 2, 3 приведены результаты расчетов, когда и штамп, и полупространство рассчитываются на основе одной вязкоупругой модели. На рис. 2 представлены кривые для модели стандартного вязкоупругого тела: цифрой 1 отмечено упругое решение, цифрами 2, 3 и 4 – решение для $\gamma = 100 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$ и $\gamma = 0,01 \text{ с}^{-1}$ соответственно. На рис. 3 изображены кривые для степенной модели: цифрой 1 отмечено упругое решение, цифрами 2, 3, 4, 5 и 6 – решение для $k = 1$, $\alpha = 0,5$; $k = 1$, $\alpha = 0,75$; $k = 1$, $\alpha = 0,95$; $k = 5$, $\alpha = 0,95$; $k = 10$, $\alpha = 0,95$ соответственно.

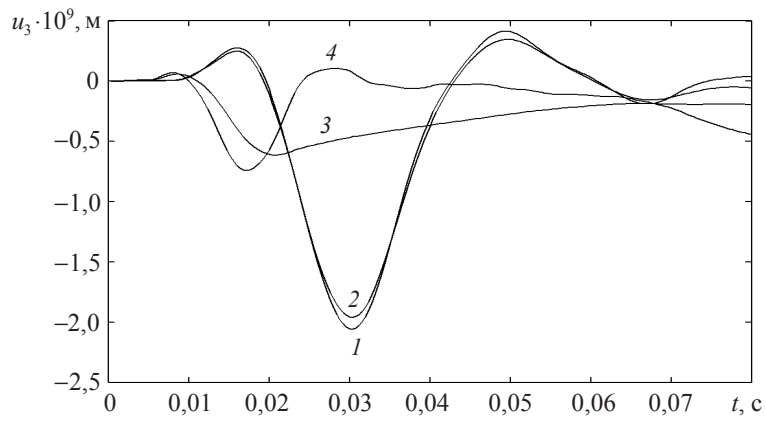


Рис. 2

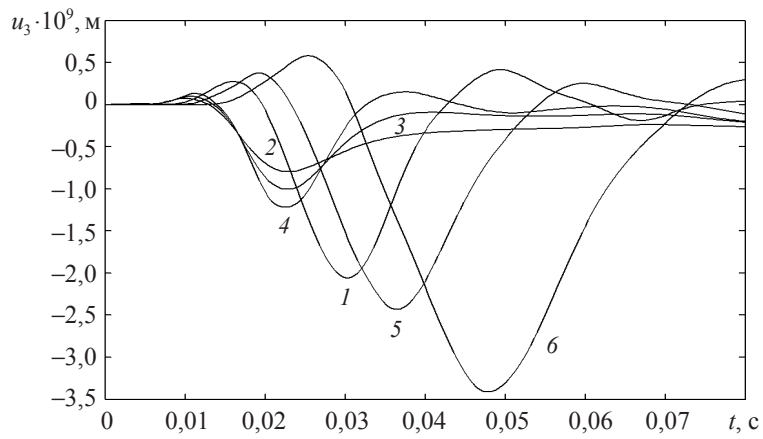


Рис. 3

На рис. 4 приведен результат для упругого штампа, расположенного на полу-пространстве, описываемом моделью стандартного вязкоупругого тела. Кривая 1 соответствует упругому решению, кривые 2, 3 и 4 – решению со значениями параметра $\gamma = 100 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 1 \text{ с}^{-1}$ и $\gamma = 0,01 \text{ с}^{-1}$ соответственно.

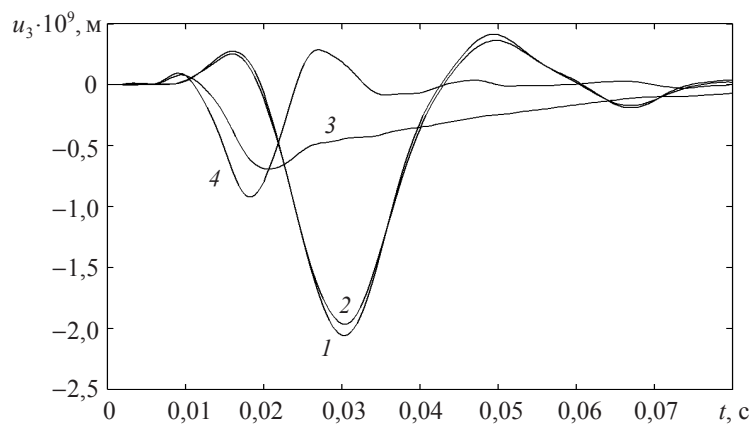


Рис. 4

Рассмотрим задачу о действии нагрузки на корпус атомной станции теплоснабжения (АСТ), изображенный на рис. 5. Геометрическая модель корпуса описана в [2]. Параметры материалов: АСТ – $E = 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,2$, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, полупространство – $E = 3 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$, $\nu = 0,2$, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$. Нагрузка действует в окрестности точки A по следующему закону:

$$P(t) = \begin{cases} p_0 t / 2, & 0 < t < 0,012 \text{ с}, \\ p_0 / 2, & 0,012 \text{ с} < t < 0,037 \text{ с}, \\ p_0(t - 0,025) / 2, & 0,037 \text{ с} < t < 0,049 \text{ с}, \\ p_0, & 0,049 \text{ с} < t < 0,06 \text{ с}, \\ p_0(-t + 0,086) / 2, & 0,061 \text{ с} < t < 0,086 \text{ с}, \\ 0, & 0,086 \text{ с} < t, \end{cases}$$

где $p_0 = 4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

Половина дискретной модели корпуса атомной станции описывается 226 ГЭ и 257 точками, полупространство содержит 940 элементов и 982 точки. Исследуются вертикальные перемещения в точке B .

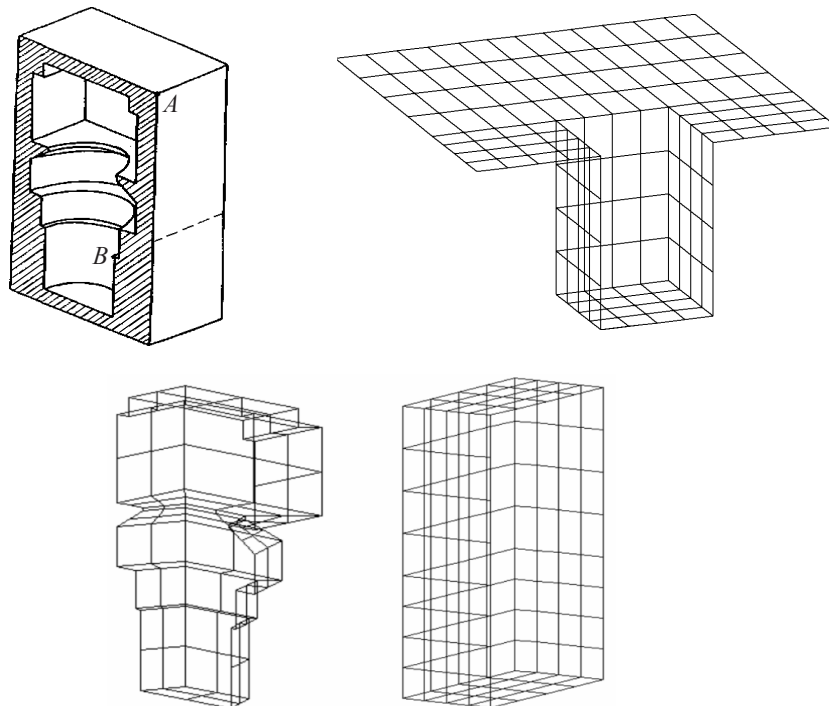


Рис. 5

На рис. 6 цифрой 1 отмечено решение, полученное с полупространством, цифрой 2 – решение, полученное на основе моделирования полупространства амортизаторами на поверхности станции [2].

На рис. 7 показано, как распространяются волны перемещений по корпусу атомной станции.

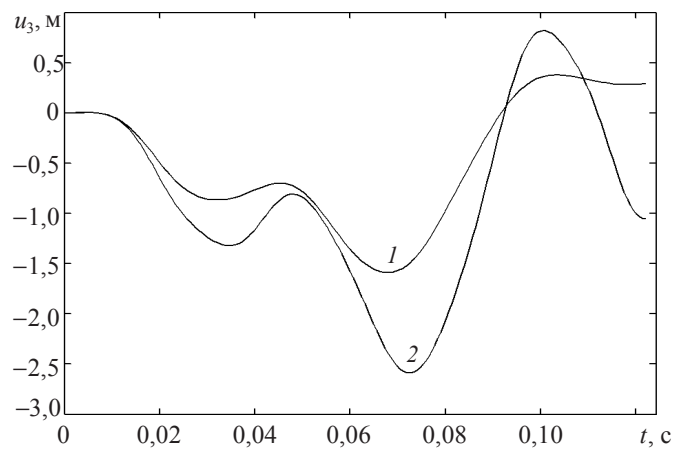


Рис. 6

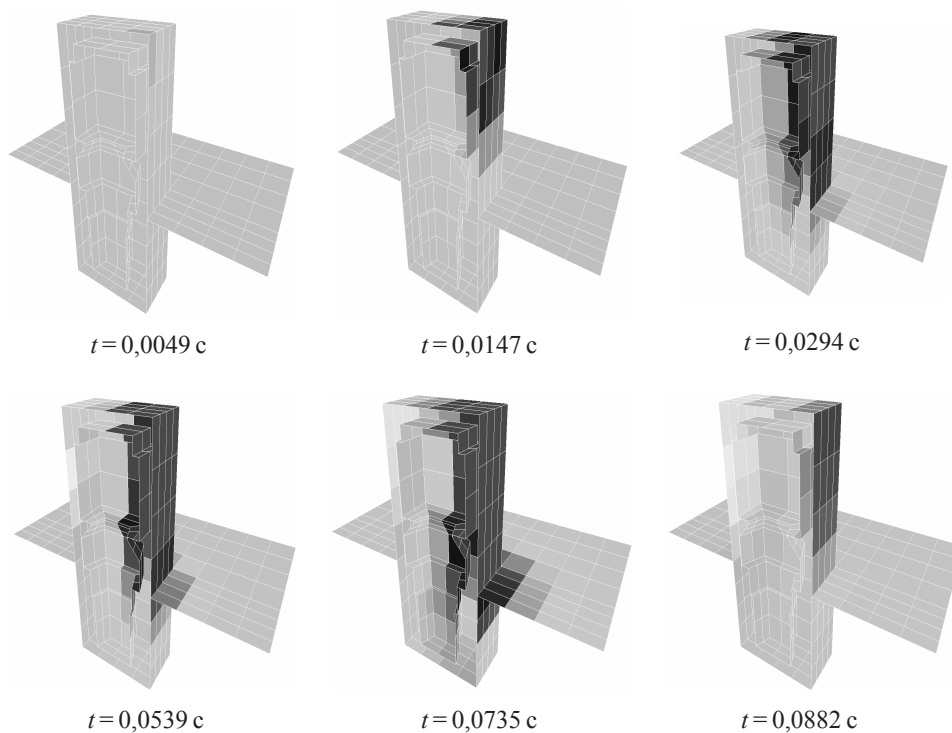


Рис. 7

Ключевые слова: составные вязкоупругие тела, метод граничных элементов, метод квадратур сверток, метод Дурбина, трехмерная задача.

Литература

1. Schanz, M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua / M. Schanz. – Berlin Springer, 2001. – 170 p.
2. Баженов, В.Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями /

В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.

3. *Белов, А.А.* Развитие метода граничных элементов для решения трехмерных контактных нестационарных динамических задач теории упругости / А.А. Белов, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2007. – Вып. 69. – С. 125–136.

4. *Durbin, F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method / F. Durbin // The Computer Journal. – 1974. – V. 17, № 4. – P. 371–376.

5. *Zhao, X.* An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate / X. Zhao // Int.J. of Solids and Structures. – 2004. – V. 41. – P. 3653–3674.

6. *Lubich, C.* Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. I. / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1988. – V. 52. – S. 129–145.

7. *Lubich, C.* Convolution Quadrature and Discretized Operational Calculus. II / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1988. – V. 52. – S. 413–425.

[10.09.2008]

BOUNDARY-ELEMENT ANALYSIS OF DYNAMICS OF COMPOUND VISCOELASTIC BODIES

A.A. Belov

The calculation results of a dynamic state of visco-elastic bodies are presented based on a boundary-element method in combination with the convolution quadrature method and Durbin's method. The solution of visco-elastic boundary problems explicitly in a 3-dimensional statement is performed without using step procedures.

Key words: compound viscoelastic bodies, boundary element method, convolution quadrature method, Durbin's method, three-dimensional problem.