

УДК 539.376

**УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ  
СЛОЖНО АРМИРОВАННЫХ  
ИЗГИБАЕМЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН<sup>\*)</sup>**

**Ю.В. Немировский, А.П. Янковский**

*Новосибирск*

Сформулирована задача поперечного изгиба кирхгофовских пластин переменной толщины, армированных волокнами постоянного поперечного сечения и работающих в условиях установившейся ползучести всех фаз композиции. Проанализированы система разрешающих уравнений и соответствующие ей граничные условия. Разработан метод решения поставленной задачи. Проведены конкретные расчеты, показавшие, что скорость прогиба установившейся ползучести пластин существенно зависит от способа их закрепления, структуры армирования и распределения толщины. Указан путь приближенного решения таких задач в условиях неустановившейся ползучести.

Известно [1], что при длительной эксплуатации изделий в случае статического нагружения подавляющую часть времени металлокомпозитная конструкция работает в условиях установившейся ползучести, поэтому актуальной является проблема расчета тонкостенных конструкций при установившейся ползучести всех фаз композиции. Изучению этого вопроса применительно к сложно армированным пластинам, нагруженным в поперечном направлении, посвящено настоящее исследование.

Рассмотрим поперечный изгиб кирхгофовой пластины (допустимость гипотез Кирхгофа при расчете установившейся ползучести изгибаемых пластин обоснована в [1]) переменной толщины  $2h$ , состоящей из изотропной матрицы и внедренной в нее тонковолокнистой однородной арматуры (металлических проволок, возможно, изготовленных из разных материалов) постоянного поперечного сечения. Предполагается: к рассматриваемому моменту времени деформации ползучести получили настолько значительное развитие, что по сравнению с ними можно пренебречь начальными упругими и пластическими деформациями [1]; пластина по толщине имеет регулярную и квазиоднородную структуру; прогибы считаются малыми.

Пластина рассматривается в прямоугольной декартовой системе координат  $x_1, x_2, z$ ; плоскость  $x_1, x_2$  совмещена со срединной плоскостью пластины до изгиба, а ось  $z$  перпендикулярна этой плоскости. Пластина армирована  $N$  семействами волокон (проволок), которые уложены в плоскостях, параллельных плоскости  $x_1, x_2$  (плоское армирование), или на поверхностях, расстояния между которыми по оси  $z$  изменяются пропорционально изменению  $h(x_1, x_2)$  (пространственное армирование).

Для формулировки задачи поперечного изгиба сложно армированных пластин в условиях установившейся ползучести необходимо использовать общеизвестные

---

<sup>\*)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00046-а).

уравнения равновесия в перерезывающих силах  $F_i$  и моментах  $M_{ij}$  [1, 2]:

$$F_{1,1} + F_{2,2} + p = 0, \quad M_{i1,1} + M_{i2,2} = F_i, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

связь между средними напряжениями в композиции  $\sigma_{ij}$  и моментами  $M_{ij}$ :

$$M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} z dz, \quad i, j = 1, 2; \quad (2)$$

соотношения между скоростями изгибных деформаций  $\xi_{ij}$  и скоростью прогиба  $v$ :

$$\xi_{ij} = -zv_{,ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad |z| \leq h, \quad (3)$$

а также выражения для осредненных напряжений  $\sigma_{ij}$  через напряжения в фазовых материалах (используется модель армированного слоя из [3]):

$$\sigma_{ij} = a\sigma_{ij}^0 + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki} l_{kj}, \quad i, j = 1, 2; \quad (4)$$

$$\sigma_{ii}^0 = 2g_0(H)(2\xi_{ii} + \xi_{jj}), \quad \sigma_{ij}^0 = 2g_0(H)\xi_{ij} \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2),$$

$$H = 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{11}\xi_{22} + \xi_{22}^2 + \xi_{12}^2}, \quad \sigma_k = g_k(\xi_k)\xi_k, \quad \xi_k = \xi_{11}l_{k1}^2 + \xi_{22}l_{k2}^2 + 2\xi_{12}l_{k1}l_{k2}, \quad (5)$$

$$l_{k1} = \cos\psi_k, \quad l_{k2} = \sin\psi_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad a = 1 - \sum_k \omega_k,$$

где  $p(x_1, x_2)$  – распределенная поперечная нагрузка;  $\sigma_{ij}^0, \sigma_k$  – напряжения в связующем и арматуре  $k$ -го семейства соответственно;  $\xi_k$  – скорость деформации ползучести в  $k$ -м семействе арматуры, связанная с напряжением  $\sigma_k$  коэффициентом пропорциональности  $g_k(\xi_k)$  (зависимость  $g_k \sim \xi_k$  известна);  $g_0(H)$  – заданная функция, являющаяся коэффициентом пропорциональности между интенсивностью касательных напряжений  $T$  и интенсивностью скоростей деформаций  $H$  в связующем:  $T = g_0(H)H$ ;  $\omega_k, \psi_k$  – интенсивность и угол (отсчитываемый от направления  $x_1$ ) армирования волокнами  $k$ -го семейства; суммирование производится по указанному индексу от 1 до  $N$ , если не указаны пределы; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной  $x_i$ .

В случае степенного закона  $\xi = B\sigma^m$ , связывающего скорость деформации  $\xi$  установившейся ползучести и напряжение  $\sigma$  в материале каждой фазы композиции, имеем зависимости [1]:

$$g_0(H) = \bar{B}_0 H^{\mu_0 - 1}, \quad g_k(\xi_k) = \bar{B}_k \xi_k^{\mu_k - 1}, \quad \bar{B}_0 = B_0^{-\mu_0}, \quad \bar{B}_k = B_k^{-\mu_k}, \quad (6)$$

$$\mu_0 = 1/m_0, \quad \mu_k = 1/m_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где  $B_0, m_0, B_k, m_k$  – известные характеристики материалов связующего и арматуры  $k$ -го семейства.

К приведенным выше уравнениям и соотношениям необходимо добавить условия постоянства поперечных сечений непрерывных волокон, которые при пространственном армировании тонкой пластины имеют вид [4]:

$$(h\omega_k \cos\psi_k)_{,1} + (h\omega_k \sin\psi_k)_{,2} = 0, \quad 1 \leq k \leq N \quad (7)$$

(в случае плоского армирования в (7) следует формально положить  $h = 1$  [4]).

Пусть область  $G$ , занимаемая пластиной в плане, ограничена контуром  $\Gamma$ , тогда на одной части этого контура (обозначим ее  $\Gamma_p$ ) могут быть заданы статические граничные условия по изгибающему моменту [2]:

$$M_{11}n_1^2 + M_{22}n_2^2 + 2M_{12}n_1n_2 = M_n, \quad n_1 = \cos\beta, n_2 = \sin\beta, (x_1, x_2) \in \Gamma_p, \quad (8)$$

и приведенной поперечной силе Кирхгофа

$$F_1n_1 + F_2n_2 + \partial_\tau(M_{n\tau}) = F_{nz}, \quad M_{n\tau} \equiv (M_{22} - M_{11})n_1n_2 + \\ + M_{12}(n_1^2 - n_2^2), \quad \partial_\tau(M_{n\tau}) = -n_2M_{n\tau,1} + n_1M_{n\tau,2}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p, \quad (9)$$

а на другой части (обозначим ее  $\Gamma_u$ ) – кинематические условия

$$v(\Gamma_u) = v_0, \quad v_{,1}n_1 + v_{,2}n_2 = \theta_n, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_u, \quad (10)$$

где  $M_n, F_{nz}$  – изгибающий момент и приведенная поперечная сила Кирхгофа, заданные на  $\Gamma_p$ ;  $v_0, \theta_n$  – скорость прогиба на  $\Gamma_u$  и производная от скорости прогиба по направлению внешней нормали к контуру, задаваемой углом  $\beta$ ;  $\partial_\tau$  – производная вдоль контура. (На контуре  $\Gamma$  могут быть заданы и смешанные из (8)–(10) граничные условия, например условия свободного опирания.)

На той части контура  $\Gamma$  (обозначим ее  $\Gamma_k$ ), на которой волокна  $k$ -го семейства входят в область  $G$ , необходимо задать краевые условия для интенсивностей армирования [4]:

$$\omega_k(\Gamma_k) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

где  $\omega_{0k}$  – заданные на  $\Gamma_k$  функции.

Структура армирования должна удовлетворять физическим ограничениям

$$0 \leq \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad \sum_k \omega_k \leq \omega_* \leq 1, \quad (12)$$

где  $\omega_* = \text{const}$  – предельно допустимая суммарная интенсивность армирования (на практике  $\omega_* \approx 0,7$ ).

Прежде чем получить разрешающее уравнение и соответствующие ему статические граничные условия, исходя из (2)–(6), определим связь между моментами и скоростью прогиба установившейся ползучести:

$$M_{ij} = -\sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijml} v_{,ml}, \quad i, j = 1, 2, \quad (13)$$

где

$$C_{iiii} = 2D_0 a \kappa^{\mu_0-1} + \sum_k D_k \omega_k I_{ki}^4 \kappa_k^{\mu_k-1}, \quad C_{ijij} = D_0 a \kappa^{\mu_0-1} + \sum_k D_k \omega_k I_{ki}^2 I_{kj}^2 \kappa_k^{\mu_k-1}, \\ C_{ijij} = 0, 5D_0 a \kappa^{\mu_0-1} + \sum_k D_k \omega_k I_{ki}^2 I_{kj}^2 \kappa_k^{\mu_k-1}, \quad C_{iijj} = \sum_k D_k \omega_k I_{ki}^3 I_{kj} \kappa_k^{\mu_k-1}, \quad (14)$$

$$(j = 3-i, i = 1, 2), \quad a = 1 - \sum_k \omega_k, \quad D_0 = 4\bar{B}_0 h^{\mu_0+2} / (\mu_0 + 2),$$

$$\kappa = 2\sqrt{v_{,11}^2 + v_{,11}v_{,22} + v_{,22}^2 + v_{,12}^2}, \quad D_k = 2\bar{B}_k h^{\mu_k+2} / (\mu_k + 2),$$

$$\kappa_k = -v_{,11}I_{k1}^2 - v_{,22}I_{k2}^2 - 2v_{,12}I_{k1}I_{k2} \quad (k = 1, 2, \dots, N).$$

**Замечание 1.** Если используется более сложный, чем степенной (6), закон связи  $\xi \sim \sigma$ , то зависимость  $\sigma = \sigma(\xi)$  для каждого фазового материала можно с наперед заданной точностью аппроксимировать многозвенной ломаной. При этом в (13) коэффициенты  $C_{ijml}$  вместо (14) можно определить по схеме, изложенной в [5]. В частности, при аппроксимации этой зависимости двухзвенной ломаной для  $C_{ijml}$  получим выражения (2.2) из [5], которые нужно разделить на 12 и в которых следует принять  $\nu = 1/2$ . (Применение алгоритма вывода выражений для  $C_{ijml}$ , использованного в [5], допустимо в силу формального сходства [1] определяющих уравнений деформационной теории пластичности, использованной в [5], и теории течения установившейся ползучести, на которой базируется настоящее исследование.)

Подставим соотношения (13) в уравнения (1) и граничные условия (8), (9) и исключим из рассмотрения поперечные силы. Тогда уравнение равновесия примет вид

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (C_{ijml} v_{,ml})_{,ij} = p(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G, \quad (15)$$

а статические граничные условия преобразуются к виду:

– по изгибающему моменту

$$\begin{aligned} & -(C_{1111} \cos^2 \beta + C_{1122} \sin^2 \beta + C_{1112} \sin 2\beta) v_{,11} - (C_{2211} \cos^2 \beta + C_{2222} \sin^2 \beta + \\ & + C_{2212} \sin 2\beta) v_{,22} - 2(C_{1211} \cos^2 \beta + C_{1222} \sin^2 \beta + C_{1212} \sin 2\beta) v_{,12} = M_n; \end{aligned} \quad (16)$$

– по приведенной силе Кирхгофа

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (C_{ijml} v_{,ml})_{,j} n_i - \frac{1}{2} \partial_\tau \{ [(C_{1122} - C_{1111}) \sin 2\beta + \\ & + 2C_{1112} \cos 2\beta] v_{,11} + [(C_{2222} - C_{2211}) \sin 2\beta + 2C_{2212} \cos 2\beta] v_{,22} + \\ & + 2[(C_{1222} - C_{1211}) \sin 2\beta + 2C_{1212} \cos 2\beta] v_{,12} \} = F_{nz}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p. \end{aligned} \quad (17)$$

(Кинематические граничные условия (10) остаются без изменения.)

Если толщина пластины  $2h$  и траектории армирования (то есть углы  $\psi_k$ ) заданы, то начально-краевая задача (7), (11) определяет интенсивности армирования  $\omega_k$  волокнами  $k$ -го семейства. (Начально-краевая задача для линейного уравнения в частных производных первого порядка (7) хорошо изучена [6], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно; отметим лишь, что уравнение (7) имеет действительные характеристики, совпадающие с траекториями армирования  $k$ -го семейства.) Если функции  $\psi_k, \omega_k, h$  известны (заданы) и удовлетворяют физическим ограничениям (12), то уравнение равновесия (15) замкнуто относительно скорости прогиба  $v$  установившейся ползучести. Этому квазилинейному (в силу того, что коэффициенты  $C_{ijml}$  зависят нелинейно от  $v_{,nr}$ ; см. (14)) эллиптическому дифференциальному уравнению в частных производных четвертого порядка соответствуют нелинейные (16), (17) и линейные (10) граничные условия.

Для линеаризации рассматриваемой граничной задачи (10), (15)–(17) можно использовать следующий итерационный процесс, базирующийся на применении идеи метода секущего модуля, предложенного в [1] для линеаризации уравнений установившейся ползучести и качественно схожего с методом переменных пара-

метров упругости [7], широко используемого для решения упругопластических задач в рамках деформационной теории. Предположим, что коэффициенты  $C_{ijml}$  в (15)–(17) известны из решения на предыдущей итерации, тогда для определения приближения скорости прогиба имеем линейную граничную задачу с переменными коэффициентами, формально совпадающую с задачей упругого поперечного изгиба неоднородных анизотропных пластин [8] (методы решения таких задач хорошо разработаны: МКЭ, МКР, вариационные методы и др.). При известном приближении скорости прогиба по формулам (14) определяем новые приближения коэффициентов  $C_{ijml}$  и т. д., пока итерационный процесс не сойдется. (Сходимость метода секущего модуля и метода переменных параметров упругости доказана [1, 7].)

Используя общеизвестные формулы [2] перехода от прямоугольной декартовой системы координат к цилиндрической, можно записать уравнения (7), (15), а также граничные (10), (16), (17) и краевые (11) условия в полярной системе координат. При этом углы армирования  $\psi_k$  отсчитываются от направления полярного радиуса  $r$ , а выражения для моментов по-прежнему определяются равенствами (13), в которых и в (14), (16) следует сделать замены  $-v_{,ij}$  на  $\kappa_{ij}$ , где в случае осевой симметрии  $\kappa_{11} = -d^2v/dr^2$ ,  $\kappa_{22} = -r^{-1}dv/dr$ ,  $\kappa_{12} = \kappa_{21} = 0$ .

В качестве примера рассмотрим расчет установившейся ползучести кольцевых пластин, ограниченных кромками радиусов  $r_0 = 0,2$  м,  $r_1 = 0,5$  м и нагруженных равномерной поперечной нагрузкой  $p = 1$  МПа. Пластины осесимметрично армированы двумя семействами волокон ( $N = 2$ ,  $\psi_2(r) = -\psi_1(r)$ ,  $\omega_2(r) = \omega_1(r)$ ), изготовленных из одного материала ( $m_2 = m_1$ ,  $B_2 = B_1$ ), и могут иметь постоянную или переменную толщину, причем в последнем случае

$$2h(r, s) = 2sh_* + 12h_*(r_1 - r_0)^{-2}(1 - s)(r_1 - r)(r - r_0) \quad (r_0 \leq r \leq r_1, 0 < s \leq 1). \quad (18)$$

При задании толщины пластины в виде (18) ее объем равен объему пластины постоянной толщины  $2h_*$ . Из (18) следует, что при  $0 < s < 1$  толщина пластины на кромках  $r=r_0, r_1$  меньше, чем во внутренних точках (максимум толщины достигается в точке  $r = (r_0 + r_1)/2$ ); при  $s = 1$  получаем пластину постоянной толщины  $2h_*$ . В расчетах будем принимать  $2h_* = 1$  см.

Так как армирование пластин осуществляется непрерывными волокнами постоянного поперечного сечения, то функции  $\psi_k, \omega_k$  в осесимметричном случае при пространственном армировании связаны равенством [4]:

$$r\omega_k(r)h(r)\cos\psi_k(r) = r_0\omega_{0k}h_0\cos\psi_{0k} \quad (19)$$

$$(\omega_{0k} \equiv \omega_k(r_0), \quad \psi_{0k} \equiv \psi_k(r_0), \quad h_0 \equiv h(r_0), \quad k = 1, 2),$$

а при плоском армировании в (19) следует формально принять  $h = h_0 = 1$  [4].

Предполагается, что пластины изготовлены из меди и армированы стальной проволокой У8А. Механические характеристики фаз композиции имеют значения:  $m_0 = 1,6$ ,  $B_0 = 3,65 \cdot 10^{-10}$  (МПа) $^{-m_0 \cdot \text{ч}^{-1}}$ ,  $m_1 = 24,98$ ,  $B_1 = 1,054 \cdot 10^{-84}$  (МПа) $^{-m_1 \cdot \text{ч}^{-1}}$ , соответствующие температуре около 200°C [9, 10].

На рис. 1 изображены зависимости максимального значения скорости прогиба установившейся ползучести ( $v_m = \max_{r_0 \leq r \leq r_1} v(r)$ ) от угла армирования по логарифмическим спиральям ( $\psi_1(r) = -\psi_2(r) = \psi = \text{const}$ ). Горизонтальные прямые 1–3 соответствуют изотропным медным пластинам ( $\omega_{0k} = 0$ ), кривые 1'–3', 2'' – армированным

конструкциям ( $\omega_{0k} = 0,35$ , см. (19)). Линии  $1, 1'$  рассчитаны для шарнирно опертых пластин постоянной толщины  $2h = 2h_*$ ; линии  $2, 2', 2''$  – для так же опертых пластин переменной толщины ( $s = 0,4$ , см. (18)); кривая  $2'$  определена при плоском, а  $2''$  – при пространственном армировании); линии же  $3, 3'$  рассчитаны для пластин постоянной толщины  $2h = 2h_*$ , шарнирно опертых на внутренней кромке и жестко защемленных на внешней кромке.

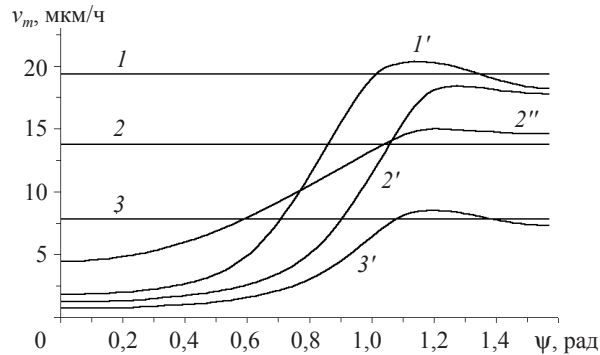


Рис. 1

Поведение кривых на рис. 1 указывает на то, что при рассматриваемых размерах конструкций наименьшая скорость прогиба установившейся ползучести развивается в радиально армированных ( $\psi = 0$ ) пластинах. (С точки зрения минимизации скорости прогиба установившейся ползучести такие структуры армирования можно считать рациональными.) На некоторых участках кривые  $1', 2', 2'', 3'$  лежат выше соответствующих прямых  $1-3$ , то есть при определенных углах спирального армирования скорость установившейся ползучести армированных конструкций может быть даже больше, чем в изотропных пластинах, выполненных из материала связующего. Линии  $2, 2'$  всюду лежат ниже линий  $1, 1'$  соответственно, поэтому за счет целевого профилирования пластины при ее плоском армировании можно дополнительно уменьшить скорость прогиба установившейся ползучести. Левые участки кривой  $2''$  лежат выше линий  $1', 2'$ , а правые участки кривой  $2''$  – ниже линий  $1', 2'$ . Следовательно, при определенных углах армирования  $\psi$  скорость прогиба при пространственном армировании конструкции (кривая  $2''$ ) может быть как больше, так и меньше, чем при плоском армировании (линии  $1', 2'$ ).

Сопоставление прямых  $1, 3$  и кривых  $1', 3'$  показывает, что замена шарнирного опирания внешней кромки пластины на жесткую заделку приводит к существенному (в разы) снижению скорости прогиба установившейся ползучести.

Как уже отмечалось выше, за счет целевого профилирования пластины можно снизить скорость прогиба установившейся ползучести. Так, на рис. 2 приведены зависимости  $v_m$  от параметра профилирования  $s$  (см. (18)) для шарнирно опертых пластин. Кривая  $1$  рассчитана для изотропной медной пластины, а линии  $2, 3$  – для радиально ( $\psi = 0$ ) армированных пластин, причем кривая  $2$  соответствует плоскому, а  $3$  – пространственному армированию. (Значения  $v_m$  при  $s = 1$  на рис. 2 равны значениям  $v_m$  на кривых  $1, 1'$  рис. 1 при  $\psi = 0$ .) Линии  $1, 2$  на рис. 2 имеют локальные минимумы при  $s \approx 0,3$ , кривая же  $3$  имеет минимум при  $s = 1$ . Следовательно, за счет профилирования (по формуле (18)) изотропной и плоско армированной пластин скорость установившейся ползучести в них можно уменьшить на 29,6 и 33,7% соот-

ответственно. Поэтому в этих случаях целесообразно формулировать задачи рационального или оптимального профилирования изотропных и армированных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести. При пространственном радиальном армировании (кривая 3) профилирование пластины по формуле (18) не приводит к уменьшению скорости прогиба, то есть в этом случае пластина постоянной толщины является рациональной.

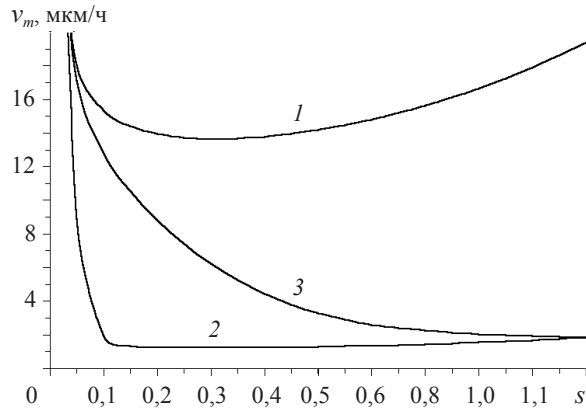


Рис. 2

На рис. 3 изображены эпюры скорости прогиба установившейся ползучести для различных кольцевых пластин. Кривые 1–4 получены для шарнирно опертых конструкций, линии 1', 3', 4' – для пластин, шарнирно опертых на внутренней кромке и жестко защемленных на внешней. Все кривые, за исключением линий 2, рассчитаны для пластин постоянной толщины; кривые же 2 – для пластины переменной толщины с параметром профилирования  $s = 0,3$  (см. (18)) – рациональный проект.

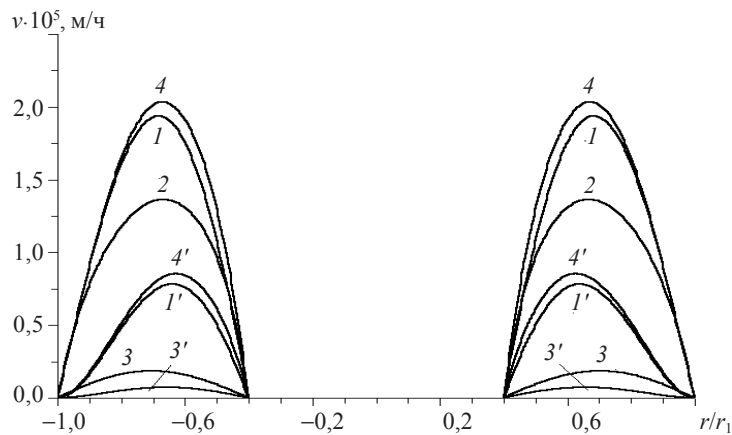


Рис. 3

Линии 1, 1', 2 соответствуют изотропным медным пластинам, остальные кривые – армированным конструкциям: линии 3, 3' получены при радиальном армировании ( $\psi = 0$ ), а кривые 4, 4' – при спиральном армировании ( $\psi = 3\pi/8$ ,  $\omega_{0k} = 0,35$ ). Сравнение кривых, приведенных на рис. 3, позволяет проследить за качественным и количественным изменением эпюр скоростей прогиба установившейся ползучести

в зависимости от способа закрепления кромок пластины, структуры ее армирования и профилирования.

**Замечание 2.** Зная из граничной задачи (10), (15)–(17) скорость прогиба  $v$ , по формулам (3)–(5) можно определить напряженное состояние во всех фазовых материалах и в композиции пластины в условиях установившейся ползучести. Если известно помимо этого и начальное напряженное состояние  $\bar{\sigma}_{ij}$  в конструкции (его можно определить, например, методами, изложенными в [5, 8, 11]), то решение о неустановившейся ползучести на первой ее стадии можно получить приближенно, используя методику, предложенную в [1]. Для этого представим текущие напряжения в пластине в виде:  $\bar{\sigma}_{ij} = (1 - \tau(t))\bar{\sigma}_{ij} + \tau(t)\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), где  $\sigma_{ij}$  – напряжения в условиях установившейся ползучести (см. (3)–(5));  $\tau(t)$  – монотонная функция времени  $t$ , возрастающая от значения  $\tau = 0$  в начальный момент времени  $t = 0$  до  $\tau = 1$  при  $t \rightarrow \infty$ . Функцию  $\tau(t)$  можно определить исходя из экстремальных принципов теории ползучести (см. §34 в [1]). В случае изотропных пластин реализация такого подхода не вызывает особых трудностей, а в случае сложно армированных пластин требует дополнительного более тщательного исследования, выходящего за рамки настоящей работы.

**Ключевые слова:** кирхгофская пластина, металлокомпозиты, поперечный изгиб, переменная толщина, установившаяся ползучесть, способ закрепления, структура армирования, приближенное решение.

#### Литература

1. Качанов, Л.М. Теория ползучести / Л.М. Качанов. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
2. Лехницкий, С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницкий. – М.: ГТТИ, 1957. – 436 с.
3. Немировский, Ю.В. Ползучесть однородных и композитных оболочек / Ю.В. Немировский // Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. междунар. конф., посвященной 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина. Казань, 26–30 июня 2000 г. – Казань: Новое знание, 2000. – С. 42–49.
4. Немировский, Ю.В. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 2. – С. 20–40.
5. Немировский, Ю.В. Упругопластический изгиб прямоугольных пластин, армированных волокнами постоянного поперечного сечения / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41, № 1. – С. 17–35.
6. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. – М.: Наука, 1966. – 260 с.
7. Калинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Калинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
8. Немировский, Ю.В. Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю.В. Немировский, Б.С. Резников. – Новосибирск: Наука, 1986. – 168 с.
9. Писаренко, Г.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справочное пособие / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский. – Киев: Наукова думка, 1981. – 496 с.
10. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
11. Немировский, Ю.В. Термоупругопластический изгиб сложно армированных пластин / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 715–742.

[27.06.2008]



## **THE STEADY CREEP OF THE COMPLEX REINFORCED BENDING METAL-COMPOSITES PLATES**

**Yu.V. Nemirovsky, A.P. Yankovsky**

The problem of a cross bending the Kirchhoff plates of the variable thickness reinforced by fibrils of constant cross section and working in requirements of erected creep of all phases of a composition is formulated. The system of the resolving equations and boundary conditions corresponding it is analysed. The method of the solution of a task in view is developed. The concrete calculations which have shown are lead, that velocity of a sag of the steady creep of plates essentially depends on an expedient of their fastening, structure of reinforcing and allocation of thickness. The method of the approximate solution of such problems to requirements of unsteady creep is specified.

**Key words:** Kirchhoff's plate, metal-composites, cross bending, variable thickness, steady creep, expedient of fastening, structure of reinforcing, approximate solution.