

УДК 539.3

О ПРОНИКАНИИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ ЖЕСТКИХ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ*)

Н.В. Баничук, С.Ю. Иванова, Е.В. Макеев

Москва

Рассматриваются задачи проникания в упругопластическую среду жестких заостренных и затупленных тел в рамках двухстадийной модели Форрестола. Формулируются задачи оптимизации формы ударников, проникающих на максимальную глубину, при ограничениях на их длину и объем. В качестве переменной проектирования принимается число граней пирамидального ударника, а в качестве оптимизируемого функционала – глубина проникания. Результаты численных исследований представлены для различных тел и различных параметров задачи. Исследуется влияние параметров затупленного пирамидального проникающего тела на величину оптимизируемого функционала.

Введение

Задачи о контактном взаимодействии жесткого тела и деформируемой среды являются очень сложными и важными в теории проникания и пробивания. Эти задачи важны как в теоретическом, так и в практическом аспектах. Исследование таких процессов основывается на экспериментальных и теоретических методах [1–21]. В настоящее время для описания поведения различных сред (бетон, песок, металлы и т.д.) применяется ряд механических моделей, которые позволяют оценить силу сопротивления, действующую на проникающее тело со стороны деформируемой среды. Результаты исследования процессов проникания существенно зависят от параметров среды (модуля Юнга, коэффициента Пуассона, предела прочности и параметров анизотропии, коэффициента неоднородности материала и активных свойств внешней среды).

Широкий класс возникающих теоретических и прикладных задач связан с задачами оптимизации. Значительное внимание уделяется в этой связи вопросам исследования минимизации силы сопротивления, действующей на жесткий ударник, а также максимизации глубины проникания (см., например, [3–8, 11–18]).

Определяющие соотношения

Рассмотрим задачу о проникании жесткого тела в упругопластическую среду, заполняющую полупространство. Предположим, что жесткое тело (ударник) движется в момент соударения с деформируемой средой с заданной начальной ско-

*) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-08-00025-а), Программы ОЭМПУ РАН "Накопление поврежденности, разрушение, изнашивание и структурные изменения материалов при интенсивных механических, температурных и радиационных воздействиях" и Программы поддержки ведущих научных школ НШ-169.2008.1.

ростью v_{imp} . Предположим также, что проникающее тело имеет пирамидальную форму, описываемую уравнением

$$r = r(t, \theta) = \varphi(t)R(\theta), \quad t = \frac{x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (1)$$

в цилиндрических координатах $r\theta x$, как показано на рис. 1.

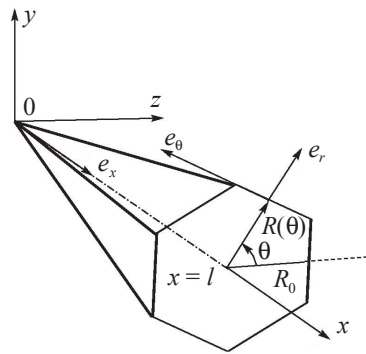


Рис. 1

Функция $R(\theta)$ описывает форму донной части при $x = l$. Безразмерная функция $\varphi(x/l) = \varphi(t)$ является коэффициентом подобия, удовлетворяющим следующим условиям:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \quad (2)$$

для заостренного пирамидального проникающего тела.

Основание ударника описывается соотношениями

$$R = \frac{R_0}{\cos \theta}, \quad R_0 = R(0). \quad (3)$$

Предположим, что на первой стадии проникания жесткого тела в упругопластическую среду (в соответствии с двухстадийной моделью проникания [1–8]) сила сопротивления D описывается линейной функцией глубины проникания

$$D = \gamma h, \quad 0 \leq h \leq H_0, \quad (4)$$

где $\gamma \geq 0$ – постоянная модели, а глубина проникания H_0 (на первой стадии) задается в виде

$$H_0 = 4R_0. \quad (5)$$

Постоянная γ определяется из условия непрерывности функции сопротивления при $h = H_0 = 4R_0$. На второй стадии проникания ($H_0 \leq h \leq H$) используются следующие выражения [3–8] для возникающих напряжений:

$$\sigma(v) = \sigma_* \left[a_0 + a_1 kv + a_2 (kv)^2 \right], \quad k = \sqrt{\frac{\rho_m}{\sigma_*}}, \quad (6)$$

где σ_* – прочность при продольном сжатии; ρ_m – плотность материала среды; a_0, a_1, a_2 – положительные константы материала среды; v – скорость проникания. Для вычисления величины силы сопротивления при $H_0 \leq h \leq H$ используются формулы

$$D = \int_{\Gamma} (\bar{e}_x, \bar{n}) \sigma(v_n) d\Gamma, \quad (7)$$

$$v_n = (\bar{e}_x, \bar{n}) v, \quad (8)$$

где \bar{e}_x – единичный вектор цилиндрической системы координат, направленный вдоль оси x (см. рис. 1); \bar{n} – единичный вектор внутренней нормали к поверхности ударника; v_n – нормальная компонента вектора скорости; (\bar{e}_x, \bar{n}) – скалярное произведение векторов; Γ – поверхность ударника, контактирующая со средой. Для того чтобы описать поверхность проникающего тела, представим вектор \bar{n} в виде

$$\bar{n} = - \frac{\text{grad}(r - \varphi(t)R(\theta))}{|\text{grad}(r - \varphi(t)R(\theta))|} = \frac{\varphi_t R/l \cdot \bar{e}_x + \varphi R_\theta / r \cdot \bar{e}_\theta - \bar{e}_r}{\sqrt{1 + \varphi_t^2 (R/l)^2 + \varphi^2 (R_\theta/r)^2}} \quad (9)$$

и, следовательно,

$$(\bar{n}, \bar{e}_x) = \frac{R}{l\chi} \varphi_t, \quad (10)$$

$$\chi = \sqrt{1 + \varphi_t^2 (R/l)^2 + (\varphi R_\theta/R)^2}. \quad (11)$$

Используя соотношения (6)–(10), получим следующее выражение для силы сопротивления:

$$\begin{aligned} D &= 2N\sigma_* \int_{\Gamma_{el}} \left[a_0 + a_1 k v \frac{R}{l\chi} \varphi_t + a_2 k^2 v^2 \left(\frac{R}{l\chi} \varphi_t \right)^2 \right] \frac{R}{l\chi} \varphi_t d\Gamma = \\ &= 2N\sigma_* \int_0^{\pi/N} \int_0^l \left[a_0 + a_1 k v \frac{R}{l\chi} \varphi_t + a_2 k^2 v^2 \left(\frac{R}{l\chi} \varphi_t \right)^2 \right] \frac{\varphi \varphi_t R^2}{l} dx d\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь Γ_{el} – элемент поверхности ударника, N – число боковых граней пирамидального тела.

Для случая когда $\varphi(t) = t$, при выполнении интегрирования по переменной x в (12) получим

$$D = N\sigma_* \int_0^{\pi/N} \left[a_0 + \frac{a_1 k v}{\psi} + a_2 \left(\frac{k v}{\psi} \right)^2 \right] R^2 d\theta, \quad (13)$$

$$\psi = \left[1 + (l/R)^2 + (lR_\theta/R^2)^2 \right]^{1/2}.$$

В случае проникания пирамидального тела в упругопластическую среду ($a_1 = 0$) будем иметь следующее выражение для силы сопротивления D :

$$D = \sigma_* R_0^2 N \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{N} \right) \left[a_0 + c k^2 v^2 \right], \quad (14)$$

$$c = a_2 \left[1 + \left(\frac{l}{R_0} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (15)$$

Глубина проникания H для ударника, имеющего заданную массу $M_0 = \rho_{imp} V_0$,

где ρ_{imp} – плотность материала ударника, V_0 – заданный объем ударника, складывается из величин $H_0 = 4R_0$ (глубина проникания на первой стадии) и h (глубина на второй стадии проникания). Для отыскания h используем закон Ньютона

$$M_0 v \frac{dv}{dh} = -D, \quad (16)$$

$$H_0 \leq h \leq H. \quad (17)$$

Учитывая, что $v_0 = v(H_0)$, и выполняя интегрирование в (16), будем иметь

$$H = H_0 + M_0 \int_0^{v_0} \frac{v dv}{D(v)}. \quad (18)$$

Интегрирование в (18) с учетом обозначения $\tilde{v} = kv$ (тильда в дальнейшем опускается) приводит к следующему выражению для глубины проникания ударника:

$$H = H_0 + \frac{V_0 \rho_{imp}}{2pR_0^2 \rho_m} \int_0^{v_0} \frac{dv^2}{a_0 + cv^2} = H_0 + \frac{V_0 \rho_{imp}}{2cpR_0^2 \rho_m} \ln \left(1 + \frac{c}{a_0} v_0^2 \right), \quad (19)$$

где

$$p = N \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{N} \right). \quad (20)$$

Начальная скорость v_0 на второй стадии проникания и начальная скорость v_{imp} на первой стадии процесса связаны соотношением

$$v_0^2 = v_{imp}^2 - \frac{\gamma}{\rho_{imp} V_0} H_0^2. \quad (21)$$

Формула (21) выведена с использованием закона Ньютона на первой стадии проникания с учетом начального условия

$$v(h=0) = v_{imp}. \quad (22)$$

Принимая во внимание выражение для γ , получаемое из условия непрерывности силы сопротивления

$$\gamma = \frac{1}{4} \sigma_* R_0 p (a_0 + cv_0^2)$$

и соотношения (21), получим представление для начальной скорости v_0 :

$$v_0^2 = \left(v_{imp}^2 - \frac{4\sigma_* R_0^3 p a_0}{\rho_{imp} V_0} \right) \left(1 + \frac{4\sigma_* R_0^3 c p}{\rho_{imp} V_0} \right)^{-1}.$$

Объем проникающего тела V должен удовлетворять следующему изопериметрическому условию:

$$V = \frac{1}{3} l R_0^2 p = V_0, \quad (23)$$

где $V_0 > 0$ – заданная константа. С использованием соотношения (23) получим выражение для параметра R_0 :

$$R_0 = \sqrt{\frac{3V_0}{lp}}. \quad (24)$$

С учетом (24) для глубины проникания H при ограничении на объем ударника будем иметь

$$H = H_0 + \frac{l\rho_{imp}}{6C\rho_m} \ln \left(1 + \frac{C}{a_0} v_0^2 \right), \quad (25)$$

где

$$C = a_2 \left(1 + \frac{l^3 p}{3V_0} \right)^{-1}. \quad (26)$$

На рис. 2 приведены результаты расчетов безразмерной глубины проникания H/l в упругопластическую среду пирамидального жесткого тела фиксированной длины $l = 0,02$ м в зависимости от числа граней N . Вычисления проводились для следующих значений параметров: $a_0 = 4,05$, $a_2 = 3,51$, $v_{imp} = 100$, $\rho_{imp}/\rho_m = 1$, $\sigma_*/\rho_{imp} = 50$ м²/с². Кривые с номерами 1–3 соответствуют значениям безразмерного объема $V_0/l^3 = 0,1; 0,125; 0,25$. Видно, что для данных значений V_0/l^3 максимальная глубина проникания достигается для трехгранника ($N = 3$). Отметим также, что глубина проникания уменьшается с возрастанием величины параметра V_0 . На рис. 3 показаны кривые с номерами 4–6, отвечающие значениям $V_0/l^3 = 0,375; 0,5; 0,625$. Видно, что в этих случаях глубина проникания возрастает с ростом параметра V_0 и максимум величины H/l в каждом случае отвечает коническому поперечному сечению ударника ($N = \infty$).

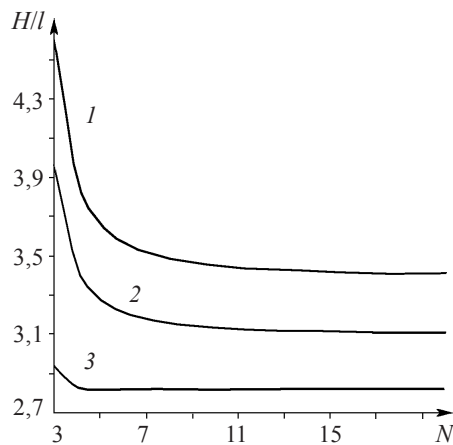


Рис. 2

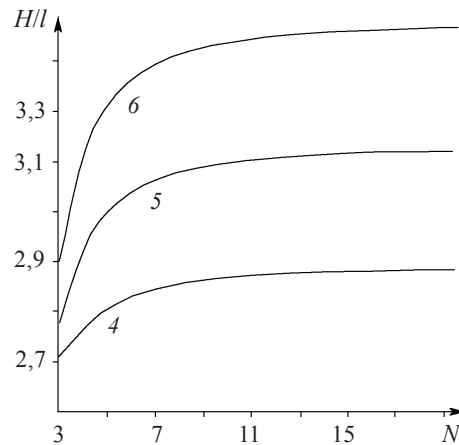


Рис. 3

Высокоскоростное проникание жесткого ударника, имеющего усеченную пирамидальную форму

Рассмотрим теперь класс жестких ударников, имеющих форму усеченных пирамидальных тел (рис. 4). Предположим, что проникание осуществляется перпендикулярно плоскости поверхности упругопластической среды с начальной скоростью v_{imp} . Гомотетичная форма ударника описывается функцией $\varphi(x/l) = \varphi(t)$ следующим образом:

$$\varphi(t) = \kappa + (1 - \kappa)t, \quad (27)$$

$$\kappa = \frac{r_b}{R_0}. \quad (28)$$

Здесь $r_b = \varphi(0)R(0)$ при $x = 0$, $R_0 = R(0)$ при $x = l$. В случае проникания усеченного тела сила сопротивления на второй стадии может быть представлена в виде

$$D = D^b + D^s = \sigma_* \kappa^2 R_0^2 N \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{N} \right) [a_0 + a_2 k^2 v^2] + \\ + \sigma_* (1 - \kappa^2) R_0^2 N \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{N} \right) \left\{ a_0 + \frac{a_2 k^2 v^2}{1 + [l / [(1 - \kappa) R_0]]^2} \right\} = \sigma_* p R_0^2 [a_0 + dk^2 v^2], \quad (29)$$

где D^b – сила сопротивления, действующая на плоский носик затупленного ударника, и D^s – сила сопротивления, действующая на боковую поверхность.

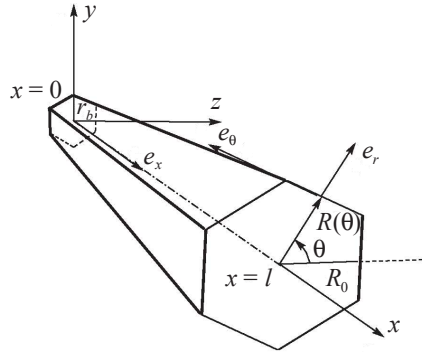


Рис. 4

Здесь используется условие (2), и величина d определяется как

$$d = \frac{R_0^2 (1 - \kappa)^2 + \kappa^2 l^2}{R_0^2 (1 - \kappa)^2 + l^2} a_2. \quad (30)$$

Принимая во внимание выражения (29), (30), можно написать соотношение для глубины проникания:

$$H = H_0 + \frac{V_0 \rho_{imp}}{2pdR_0^2 \rho_m} \ln \left(1 + \frac{d}{a_0} v_0^2 \right), \quad (31)$$

где v_0^2 находится с помощью той же процедуры, что и в случае остроконечного пирамидального тела, и определяется следующим выражением:

$$v_0^2 = \left(v_{imp}^2 - \frac{4\sigma_* R_0^3 p a_0}{\rho_{imp} V_0} \right) \left(1 + \frac{4\sigma_* R_0^3 dp}{\rho_{imp} V_0} \right)^{-1}.$$

В случае усеченного пирамидального тела, имеющего заданный объем V_0 и заданную длину l , можем переписать изопериметрическое условие (23) как

$$V = \frac{1}{3} l R_0^2 p (1 + \kappa + \kappa^2) = V_0. \quad (32)$$

Отсюда следует выражение для R_0 :

$$R_0 = \sqrt{\frac{3V_0}{lp(1+\kappa+\kappa^2)}}. \quad (33)$$

Учитывая (33), получим соотношение для глубины проникания затупленного ударника при ограничении на его объем (32) в виде

$$H = H_0 + \frac{lp_{imp}(1+\kappa+\kappa^2)}{6C_1\rho_m} \ln\left(1 + \frac{C_1 v_0^2}{a_0}\right), \quad (34)$$

где

$$C_1 = \frac{3V_0(1-\kappa)^2 + \kappa^2 pl^3(1+\kappa+\kappa^2)}{3V_0(1-\kappa)^2 + pl^3(1+\kappa+\kappa^2)} a_2. \quad (35)$$

Зависимость безразмерной глубины проникания H/l усеченного пирамидального тела от числа боковых граней N показана на рис. 5, когда $V_0/l^3 = 0,1$ и $a_0 = 4,05$, $a_2 = 3,51$, $v_{imp} = 200$, $\rho_{imp}/\rho_m = 1$, $\gamma/\rho_{imp} = 50$ м²/с².

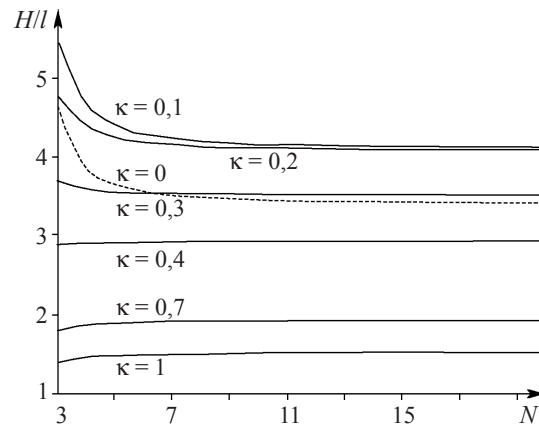


Рис. 5

Случай, когда $\kappa = 0$ (остроконечное тело), показан пунктирной линией. Глубина проникания для значения $\kappa = 0,1$ увеличивается по сравнению со случаем, когда $\kappa = 0$, причем максимум для каждого случая достигается при $N = 3$. С увеличением значения параметра κ наблюдается уменьшение глубины проникания. Минимальное значение она принимает для цилиндрического тела ($\kappa = 1$). Заметим также, что для каждого из рассмотренных случаев при $\kappa \geq 0,4$ максимум отвечает круговому сечению ударника ($N = \infty$).

Заключение

В рамках двухстадийной модели рассмотрена задача максимизации глубины высокоскоростного проникания в упругопластическую среду жесткого пирамидального тела заданной длины при важном ограничении на объем ударника. Изучена зависимость глубины проникания от числа боковых граней ударника для ряда значений параметров задачи и различных значений объема проникающего тела.

Показано, что небольшое усечение пирамидального ударника может увеличить глубину проникания.

Ключевые слова: оптимизация, жесткие неосесимметричные тела, упругопластическая среда, модель Форрестала, форма ударника, глубина проникания.

Литература

1. *Forrestal, M.J.* A spherical cavity-expansion penetration model for concrete targets / M.J. Forrestal, D.Y. Tzou // *International Journal of Solids and Structures*. – 1997. – V. 34(31-32). – P. 4127–4146.
2. *Forrestal, M.J.* An empirical equation for penetration depth of ogive-nose projectiles into concrete targets / M.J. Forrestal, B.S. Altman, J.D. Cargile, S.J. Hanchak // *International Journal of Impact Engineering*. – 1994. – V. 15(4) – P. 395–405.
3. *Ben-Dor, G.* Optimal nose geometry of the impactor against FRP laminates / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // *Compos. Struct.* – 2002. – V. 55. – P. 73–80.
4. *Ben-Dor, G.* Numerical solution for shape optimization of an impactor penetrating into a semi-infinite target / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // *Computers and Structures*. – 2003. – V. 81(1). – P. 9–14.
5. *Ben-Dor, G.* Shape optimization of an impactor penetrating into a concrete or a limestone target / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // *International Journal of Solids and Structures*. – 2003. – V. 40(17). – P. 4487–4500.
6. *Ben-Dor, G.* Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics. A review / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // *ASME Appl. Mech. Rev.* – 2005. – V. 58(6). – P. 355–371.
7. *Ben-Dor, G.* Modelling of high-speed penetration into concrete shields and shape optimization of impactors / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin // *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. – 2006. – V. 34(2). – P. 139–156.
8. *Ben-Dor, G.* Applied high-speed penetration dynamics / G. Ben-Dor, A. Dubinsky, T. Elperin. – Netherlands: Springer, 2006.
9. *Li, Q.M.* Local impact effects of hard missiles on concrete targets / Q.M. Li, S.R. Reid, H.M. Wen, A.R. Telford // *International Journal of Impact Engineering*. – 2005. – V. 32(1-4). – P. 224–284.
10. *Бивин, Ю.К.* Проникание твердых тел в сыпучие и слоистые среды / Ю.К. Бивин // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. – 2008. – № 1. – С.154–160.
11. *Bunimovich, A.I.* The shapes of three-dimensional minimum-resistance bodies moving in compressible plastic and elastic media / A.I. Bunimovich, G.E. Yakunina // *Moscow Univ. Mech. Bull.* – 1987. – V. 42. – P. 59–62.
12. *Bunimovich, A.I.* On the shape of minimum-resistance solids of revolution moving in plastically compressible and elastic-plastic media / A.I. Bunimovich // *J. Appl. Math. Mech.* – 1987. – V. 51. – P. 386–392.
13. *Bunimovich, A.I.* On the shape of a minimum resistance solid of rotation penetrating into plastically compressible media without detachment / A.I. Bunimovich, G.E. Yakunina // *J. Appl. Math. Mech.* – 1989. – V. 53. – P. 680–683.
14. *Ostapenko, N.A.* Optimum forms of three-dimensional bodies for penetration of dense media / N.A. Ostapenko, V.L. Romanenko, G.E. Yakunina // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 1994. – V. 4. – P. 515–521.
15. *Ostapenko, N.A.* The shape of slender three dimensional bodies with maximum depth of penetration into dense media / N.A. Ostapenko, G.E. Yakunina // *J. Appl. Math. Mech.* – 1999. – V. 63. – P. 953–967.
16. *Yakunina, G.E.* On body shapes providing maximum penetration depth in dense media / G.E. Yakunina // *Doklady Physics*. – 2001. – V. 46(2). – P. 140–143.
17. *Yakunina, G.E.* On the optimal shapes of bodies moving in dense media / G.E. Yakunina // *Doklady Physics*. – 2005. – V. 50(12). – P. 650–654.
18. *Крайко, А.Н.* К построению оптимальных тел в рамках моделей локального взаимо-

действия / А.Н. Крайко, Г.Е. Якунина // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72(1). – Р. 41–53.

19. Брагов, А.М. Обращенный эксперимент и численный анализ осесимметричных процессов соударения твердых тел и песчаного грунта / А.М. Брагов, В.Л. Котов, А.В. Кочетков, С.В. Крылов // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 1999. – Вып. 60. – С. 12–18.

20. Сагомоян, А.Я. Динамика пробивания преград / А.Я. Сагомоян. – М.: Изд-во МГУ, 1988.

21. Баженов, В.Г. Экспериментально-теоретическое исследование процессов взаимодействия ударников различной формы с преградой из песка / В.Г. Баженов, В.В. Баландин, А.М. Брагов и др. // Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения: Аннот. докл. II науч. конф. Волжского регионального центра (г. Саров, 29 мая – 1 июня 2001 г.) Саров: ИПК РФЯЦ-ВНИИЭФ. – 2001. – С. 112–113.

[27.06.2008]

ON PENETRATION OF RIGID NON-AXISYMMETRIC BODIES INTO ELASTIC-PLASTIC MEDIUM

N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova, Ye.V. Makeyev

A problem of maximizing a penetration depth of the pyramidal bodies of a given length under the constraint on the impactor's volume is investigated in the context of two-stage Forrestal's penetration model of a rigid impactor into the deformed medium. The computational results are given for various values of the problem parameters.

Key words: optimization, rigid nonaxisymmetric bodies, elastic-plastic medium, Forrestal's model, impactor's form, penetration depth.