

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ
АВТОМОДЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСШИРЕНИИ
СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ
НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА "УДАРНИК–ГРУНТ"*)**

В.Л. Котов

Нижний Новгород

Приведена постановка и численно получено обобщенное решение одномерной задачи о расширении сферической полости в сжимаемой упругопластической среде с использованием непрерывного продолжения решения на границе упругой и пластической зон и с выделением возникающей ударной волны. Исследована применимость к решению задач удара и проникания в мягкий грунт модели локального взаимодействия на базе одномерных автомоделных решений о расширении сферической полости в несжимаемой и сжимаемой среде. Результаты приближенного решения задач о нормальном внедрении в грунт жестких конических и сферических тел сопоставлены с численными решениями в двумерной осесимметричной постановке.

Введение

Определение закономерностей процессов проникания твердых тел в грунтовые среды затруднено как нестационарностью самих процессов, так и неоднородностью и нестабильностью свойств природных грунтов. В связи с этим для описания процессов проникания широкое распространение получили приближенные подходы, в соответствии с одним из которых давление в каждой точке боковой поверхности ударника отождествляется с давлением на внутренней поверхности сферической полости, расширяющейся в безграничной среде от нулевого радиуса, – модель локального взаимодействия (МЛВ). Решения задачи проникания в рамках этого подхода для упругоидеальнопластической несжимаемой среды применены [1–3] для оценки сил сопротивления и глубин проникания осесимметричных ударников в металл и бетон. Дальнейшее развитие этого метода проводилось для ударников со сложной формой [4–6], несжимаемой среды с условием пластичности Мора–Кулона [7] и с учетом сжимаемости среды [8, 9]. Отмечено незначительное влияние учета сжимаемости на параметры процесса проникания в металлы [10–12]. В работах [13, 14] показано, что сжимаемость на начальном этапе внедрения имеет существ-

*) Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00500-а, 07-08-13637-офи_ц) и Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-3367.2008.8, грант Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук и их руководителей МК-4839.2008.8).

венное значение в случае грунтовой среды, хотя в целом этот вопрос исследован недостаточно. Таким образом, исследование применимости МЛВ и базирующихся на ее основе методов расчета параметров взаимодействия ударников с нелинейно сжимаемыми грунтовыми средами [15–18] представляет интерес и в настоящее время.

1. Решение задачи о расширении сферической полости

Рассматривается одномерная задача о расширении от нулевого радиуса сферической полости в грунтовой среде [19] с постоянной скоростью V . Среда считается упругопластической, упругие свойства характеризуются модулями объемного сжатия K и сдвига G , в пластической области среда подчиняется условию текучести Мизеса–Шлейхера

$$p = K\theta \equiv K(\rho/\rho_0 - 1), \quad \sigma_r - \sigma_\theta = Y + \mu p \equiv (\sigma_r + 2\sigma_\theta)/3,$$

где p – гидростатическое давление, θ – объемная деформация, ρ и ρ_0 – плотности в деформированном и начальном состояниях, σ_r и σ_θ – радиальная и окружная компоненты тензора напряжений Коши (принимаются положительными при сжатии), Y и μ – константы критерия текучести. Уравнения изменения количества движения и неразрывности в эйлеровых переменных (сферическая симметрия)

$$\sigma_{r,r} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta)/r = -\rho(v_{,t} + \nu v_{,r}), \quad \rho(v_{,r} + 2\nu/\rho) = -(\rho_{,t} + \nu\rho_{,r}),$$

с учетом выполнения условия текучести в пластической области записываются следующим образом:

$$\sigma_{r,r} + 2(Y + \mu p)/r = -\rho(v_{,t} + \nu v_{,r}), \quad p(\sigma_r - 2/3 Y)/(1 + 2/3 \mu),$$

$$v_{,r} + 2\nu/r = -(\sigma_{r,t} + \nu\sigma_{r,r})/(\rho a^2), \quad \rho_0 a^2 = (1 + 2/3 \mu)K \equiv K_1.$$

Введем безразмерные переменные $S = \sigma_r/K_1$, $P = p/K_1$, $U = \nu/c$, $\varepsilon = V/c$, $T = Y/K_1$, $J = \rho_0 V^2/Y$, $b = \rho_0/\rho$, где ν – массовая скорость, c – скорость движения поверхности раздела пластической и упругой зон, и рассмотрим автомодельное решение полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно переменной $\xi = r/ct$. После замены переменной система приобретает следующий вид (штрихом обозначено дифференцирование по переменной ξ):

$$S' + \frac{2(T + \mu P)}{\xi} = \frac{\beta^2}{b}(\xi - U)U', \quad U' + \frac{2U}{\xi} = b(\xi - U)S',$$

или в нормальной форме:

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{2U/\xi + 2(T + \mu P)(\xi - U)/\xi}{\beta^2(\xi - U)^2 - 1}, \quad \frac{dS}{d\xi} = \frac{2(T + \mu P)/\xi + 2\beta^2 U(\xi - U)/b\xi}{\beta^2(\xi - U)^2 - 1},$$

где $\beta^2 = c^2/a^2$, $P = (S - 2/3 T)/(1 + 2/3 \mu)$, $\rho/\rho_0 = S - 2/3 T + 1$.

На границе полости,двигающейся со скоростью V , выполняется условие $U|_{\xi=\varepsilon} = \varepsilon$, а на границе раздела упругой и пластической зон $\xi = 1$ справедливо упругое решение [2, 8, 10]:

$$S|_{\xi=1} = \frac{2}{3}T + \frac{2(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{\varepsilon J T}{\left[1 + \sqrt{(1-2\nu)/(1-\nu)} \varepsilon J\right]}, \quad U|_{\xi=1} = 1 - \exp\left[-\frac{(1+\nu)K_1 S / K}{2(1-2\nu)}\right],$$

где ν – коэффициент Пуассона. В случае сверхзвукового движения, когда $\beta = c/a > 1$, в точке $\xi = 1$ применяются соотношения на разрыве, которые особенно просто записываются в случае пренебрежения упругим предвестником ($\mu P \gg T$):

$$U|_{\xi=1} = 1 - \beta^{-2}, \quad S|_{\xi=1} = (1 + 2/3\mu)P + 2/3T, \quad \rho = \rho_0\beta^2.$$

Решение задачи Коши для нелинейной системы ОДУ осуществляется численно методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности от границы упруго-пластического раздела при $\xi = 1$ до границы полости $\xi = \varepsilon$ [10]. Нахождение неизвестной скорости c проводится итерационно до выполнения граничного условия с заданной точностью: $|U - \varepsilon| < \delta$.

На рис. 1 приведено изменение радиальной компоненты тензора напряжения на поверхности полости в зависимости от величины β .

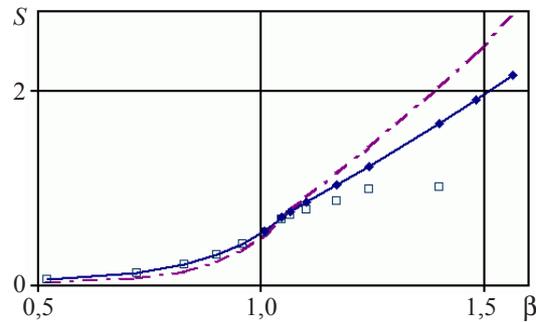


Рис. 1

Расчеты проводились при значениях K , G и Y , равных 320, 160 и 0,5 МПа соответственно, $\rho_0 = 2$ г/см³, $\mu = 1$. Сплошной линией показано численное решение по схеме сквозного счета, квадраты и ромбы соответствуют решению задачи Коши для системы ОДУ с использованием непрерывного продолжения решения на границе упруго-пластического раздела и с использованием соотношений на ударной волне. Штрихпунктирная линия соответствует напряжению, полученному в предположении несжимаемости среды [5, 10].

На рис. 2 приведены распределения скоростей и напряжений в интервале изменения переменной $\xi = [\varepsilon, 1]$, полученные для скоростей расширения полости 150 м/с (а) и 450 м/с (б). Сплошные и штриховые линии соответствуют решениям по схеме сквозного счета, маркерами показано автомодельное решение.

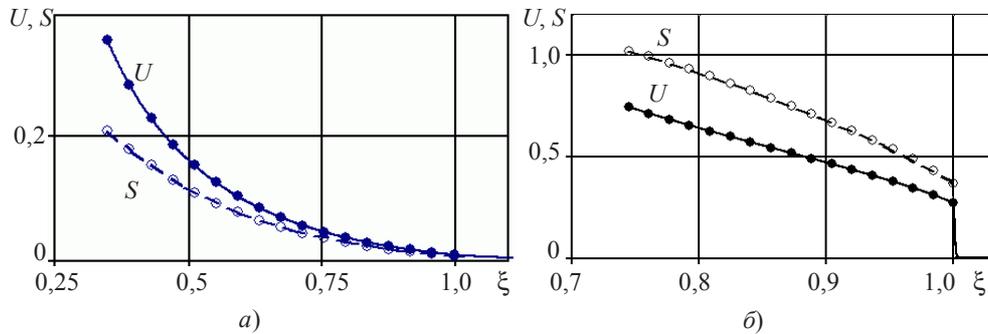


Рис. 2

Как было отмечено выше, решение данной задачи в квадратурах возможно только в предположении несжимаемости среды [5, 10]:

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{1 + \ln(2G/Y)}{J} + 3. \quad (1)$$

На рис. 3 сплошными линиями показаны безразмерные напряжения $\sigma = 2S/TJ = \sigma_r/(0,5\rho_0 V^2)$ на границе полости для значений $\mu = 1; 0,5; 0$ в зависимости от скорости расширения полости, отнесенной к скорости продольной пластической волны a .

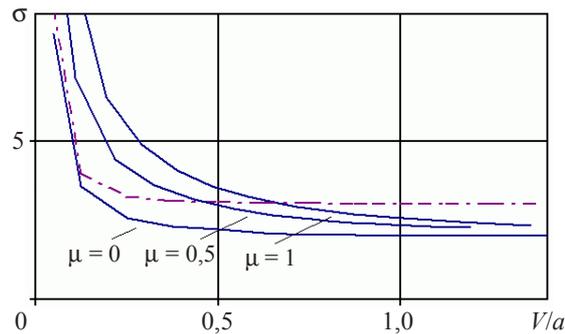


Рис. 3

Заметно значительное совместное влияние учета сжимаемости и зависимости предела текучести от давления, особенно при дозвуковых скоростях расширения полости.

2. Определение силы сопротивления внедрению в упругопластическую среду конического ударника

Известно [20] выражение для давления на боковой поверхности конуса, проникающего в сжимаемую пластическую среду, механические свойства которой выражаются соотношениями

$$b = \frac{\rho_0}{\rho} = \text{const}, \quad \sigma_r - \sigma_\theta = Y + \sin(\sigma_r + \sigma_\theta),$$

где ρ_0 – начальная плотность, ρ – плотность за фронтом ударной волны (УВ), φ – угол внутреннего трения, и принимается, что частицы грунта в области между УВ и проникающим конусом движутся по траекториям, совпадающим с нормальными к поверхности конуса.

Рассмотрим приближенное решение [20], в котором напряжение на боковой поверхности проникающего конуса постоянно и зависит только от величины нормальной компоненты вектора скорости:

$$\sigma = \frac{\sigma_n}{0,5\rho_0 V_n^2} = \frac{2\rho_0}{b} \left[bz^{\gamma/2} - \frac{z^{\gamma/2-1} - 1}{\gamma - 2} + \frac{z^{\gamma/2} - 1}{\gamma} \right], \quad V_n = V \sin \beta. \quad (2)$$

Здесь $z = (1 - b)^{-1}$, $\gamma = 2 \sin \varphi / (1 + \sin \varphi)$, β – угол полураствора конуса. Связь угла внутреннего трения φ и параметра μ задается выражением $\sin \varphi = 3\mu / (\mu + 6)$, при этом $\gamma = \mu / (1 + 2/3\mu)$.

Ранее было показано [21], что решения (2) лучше согласуются с результатами двумерных численных расчетов, если плотность на УВ получена из решения нелинейной задачи о распаде разрыва. При этом в случае линейной зависимости давления от плотности для ρ справедливо:

$$\rho^2 - \rho\rho_0(2 + M_n^2) + \rho_0^2 = 0, \quad M_n = V_n / a.$$

На рис. 4,а приведены напряжения $\sigma = \sigma_n / (0,5\rho_0 V^2)$, действующие на боковую поверхность проникающего конуса, в зависимости от величины M_n нормальной скорости удара, отнесенной к скорости звука в среде. Сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии соответствуют автомодельному решению задачи о расширении полости со скоростью V_n , решению (2) в предположении несжимаемости среды за фронтом УВ и решению (1) с использованием гипотезы несжимаемости (интервалы характеризуют относительную погрешность $\pm 15\%$).

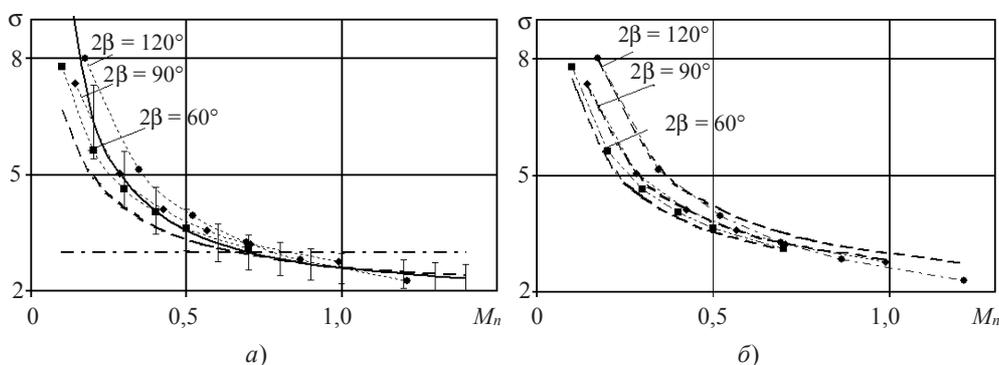


Рис. 4

Кружки, ромбы и квадраты на рис. 4 соответствуют результатам численных расчетов в осесимметричной постановке задачи о проникании конуса с углом раствора $2\beta = 120, 90$ и 60 градусов в диапазоне скоростей от 100 до 700 м/с. Полученные результаты подтверждают выводы [20] о том, что давление, действующее на боковую поверхность конуса, можно считать постоянной величиной с погрешностью $10\text{--}20\%$ для углов раствора конуса не более 120 градусов. Автомодельное решение задачи о расширении полости дает хорошее соответствие результатов в выбранном диапазоне скоростей внедрения и углов раствора конуса. Близкие результаты получаются с использованием формулы (2) в предположении несжимаемости среды за фронтом УВ. Более точные результаты могут быть получены с учетом нелинейного распределения давления вдоль боковой поверхности конуса [20, 21], как показано на рис. 4,б. Использование гипотезы несжимаемости среды для оценки нормальных напряжений приводит к заметным ошибкам при дозвуковых скоростях внедрения, особенно при малых и средних углах раствора конуса (см. рис. 4,а).

3. Определение силы сопротивления внедрению в упругопластическую среду полусферического ударника

Сила сопротивления внедрению в приближенных моделях определялась интегрированием напряжений по поверхности ударника. Нормальные напряжения на поверхности ударника вычислялись в соответствии с полученными выше зависи-

мостями (1), (2) "напряжение–нормальная скорость". На рис. 5 приведены зависимости безразмерной силы F/F_0 сопротивления внедрению полусферического ударника от безразмерной глубины проникания H/R (обозначены кружками) со скоростями $V = 100$ (а) и 300 м/с (б) соответственно.

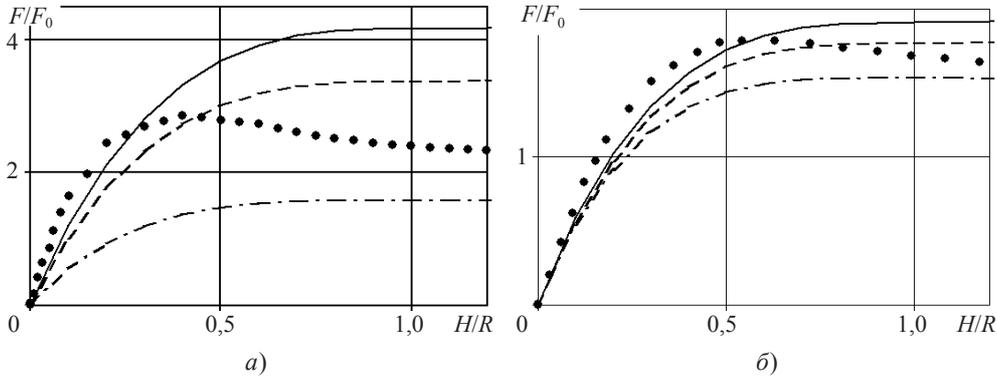


Рис. 5

Значения силы отнесены к $F_0 = 0,5\rho_0 V^2 \pi R^2$, где V – начальная скорость удара, R – радиус цилиндрической части ударника. На рис. 5 сплошная, штриховая и штрихпунктирная линии соответствуют модели локального взаимодействия с применением автомодельного решения задачи о расширении полости со скоростью V_n , решению (2) в предположении несжимаемости среды за фронтом УВ и решению (1) с использованием гипотезы несжимаемости. На рис. 6 приведено распределение нормального напряжения вдоль поверхности полусферического ударника, проникающего со скоростями 100 (а) и 300 м/с (б), на моменты времени, соответствующие достижению максимума силы сопротивления. Значения напряжений отнесены к $0,5\rho_0 V^2$, угол, отсчитываемый от вершины ударника, приведен в долях π .

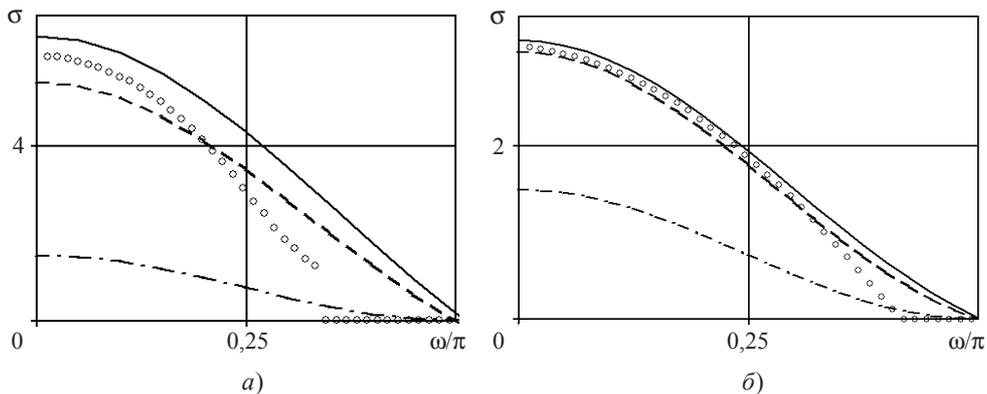


Рис. 6

На рис. 7 кружками изображена зависимость максимума безразмерной силы сопротивления внедрению сферического ударника в грунт от безразмерной скорости удара $M = V/a$, полученная в расчетах, другие обозначения аналогичны используемым на рис. 5, 6 (интервалами показана относительная погрешность $\pm 15\%$).

Максимум силы в приближенных решениях определялся с учетом срыва потока, угол срыва, отсчитываемый от вершины ударника, составлял приблизительно

60 градусов [19, 20], что соответствует глубине погружения на расстояние, равное $R/2$. Таким образом, для лучшего соответствия результатам двумерных численных расчетов модель локального взаимодействия затупленных тел должна быть дополнена критерием отрыва потока упругопластической среды [16].

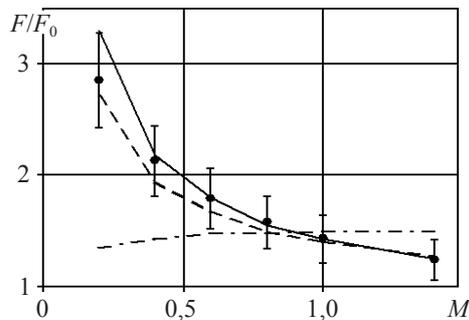


Рис. 7

Заключение

Приведена постановка и численно получено обобщенное решение автомодельной задачи о расширении сферической полости в сжимаемой упругопластической среде с использованием непрерывного продолжения решения на границе упругой и пластической зон и с выделением возникающей ударной волны. Показано, что приближенное решение осесимметричных задач о нормальном внедрении в грунт жестких конических и сферических тел на базе МЛВ с использованием одномерных решений для сжимаемой среды и с учетом отрыва потока удовлетворительно соответствует двумерным численным решениям. Использование гипотезы несжимаемости среды для оценки нормальных напряжений приводит к заметным ошибкам, особенно при дозвуковых скоростях внедрения.

Ключевые слова: обобщенное решение, одномерная задача, расширение сферической полости, сжимаемая упругопластическая среда, задача удара и проникания в мягкий грунт, жесткие конические и сферические тела.

Литература

1. Бабаков, В.А. Об одном методе расчета пневмопробойника в деформируемой среде / В.А. Бабаков, Е.В. Шабунин // ФТПРПИ. – 1987. – №1. – С. 105–110.
2. Forrestal, M.J. Dynamic spherical cavity-expansion in a compressible elastic-plastic solid / M.J. Forrestal, V.K. Luk // J. Appl. Mech. – 1988. – V. 55. – P. 275–279.
3. Романова, С.В. Взаимодействие твердого тела с деформируемой преградой при наклонном соударении / С.В. Романова, А.Я. Сагомоян // Вестник Моск. ун-та. Математика. Механика. – 1989. – № 6. – С. 38–42.
4. Шабунин, Е.В. Расчет проникания ударников со сложной формой / Е.В. Шабунин // ФТПРПИ. – 1992. – № 6. – С. 43–47.
5. Высокоскоростное взаимодействие тел / Фомин В.М. [и др.] – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 600 с.
6. Chen, X.W. Deep penetration of a non-deformable projectile with different geometrical characteristics / X.W. Chen, Q.M. Li // Int. J. Impact Engng. – 2002. – V. 27. – P. 619–637.
7. Warren, T.L. Penetration of limestone targets by ogive-nosed VAR 4340 steel projectiles at oblique angles: experiments and simulations / T.L. Warren, S.J. Hanchak, K.L. Poormon // Int. J. Impact Engng. – 2004. – V. 30. – P. 1307–1331.
8. Durban, D. Dynamic spherical cavity expansion in a pressure sensitive elastoplastic medium

/ D. Durban, R. Masri // Int. J. Sol. Struct. – 2004. – V. 41. – P. 5697–5716.

9. *Cleja-Tigoiu, S.* Dynamic expansion of spherical cavity within a rate-dependent compressible porous material / S. Cleja-Tigoiu, O. Cazacu, V. Tigoiu // Int. J. Plast. – 2008. – V. 24. – P. 775–803.

10. Penetration into ductile metal targets with rigid spherical-nose rods / Forrestal M.J. [et al.] // Int. J. Impact Engng. 1995. – V. 16. – № 5/6. – P. 699–710.

11. *Rosenberg, Z.* A numerical study of the cavity expansion process and its application to long-rod penetration mechanics / Z. Rosenberg, E. Dekel // Int. J. Impact Engng. – 2008. – V.35. – P. 147–154.

12. *Forrestal, M.J.* Penetration equations for ogive-nose rods into aluminum targets / M.J. Forrestal, T.L. Warren // Int. J. Impact Engng. – 2008. (in press).

13. *Бивин, Ю.К.* Изменение направления движения твердого тела на границе раздела сред / Ю.К. Бивин // МТТ. – 1981. – № 4. – С. 105–109.

14. *Колесников, В.А.* Об изменении траектории метеорита при входе в грунт / В.А. Колесников // МТТ. – 1981. – № 4. – С. 99–104.

15. *Остапенко, Н.А.* Тела вращения минимального сопротивления при движении в плотных средах / Н.А. Остапенко // Успехи механики. – 2002. – №2. – С. 105–149.

16. *Осипенко, К.Ю.* Модель пространственной динамики тела вращения при взаимодействии с малопрочной средой и несимметричной кавитации / К.Ю. Осипенко, И.В. Симонов // МТТ. – 2002. – № 1. – С. 143–153.

17. *Якунина, Г.Е.* Оптимальные формы движущихся в среде тел при учете трения / Г.Е. Якунина // ПММ. – 2005. – Т. 69, вып. 5. – С. 759–774.

18. *Крайко, А.Н.* К построению оптимальных тел в рамках моделей локального взаимодействия / А.Н. Крайко, Г.Е. Якунина // ПММ. – 2008. – Т. 72. – Вып. 1. – С. 41–53.

19. *Григорян С.С.* Об основных представлениях динамики грунтов / С.С. Григорян // ПММ. – 1960. – Т. 24. – №6. – С. 1057–1072.

20. *Сагомоян, А.Я.* Проникание / А.Я. Сагомоян. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 299 с.

21. Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт / В.Г. Баженов [и др.] // ПММ. – 2003. – Т. 67, вып. 6. – С. 686–697.

[11.06.2008]

**STUDYING THE APPLICABILITY OF THE AUTO-MODELING ANALYSIS
OF THE PROBLEM OF EXPANSION OF A SPHERICAL CAVITY
IN A COMPRESSIBLE MEDIUM FOR DETERMINING
THE PRESSURE ON THE SURFACE OF THE STRIKER-SOIL CONTACT**

V.L. Kotov

A one-dimensional problem of expansion of a spherical cavity in a compressible elasto-plastic medium is formulated and numerically analyzed in a generalized form, using a continual solution along the boundary between the elastic and plastic zones and separating the arising shock wave. Applicability of the model of local interaction based on one-dimensional auto-modeling analysis of expansion of a spherical cavity in compressible and incompressible media to analyzing the problems of impact and penetration in soft soils is studied. The results of approximately solving the problems of normal penetration of hard conical and spherical bodies into the soil are compared with their numerical solutions in a two-dimensional axisymmetric formulation.

Key words: generalized solution, one-dimensional problem, expansion of a spherical cavity, compressible elasto-plastic medium, problem of impact and penetration in soft soil, hard conical and spherical bodies.