УДК 539.3

КИНЕМАТИКА КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОБОЛОЧЕК

А.И. Голованов

Казань

В рамках изопараметрической аппроксимации излагается методология вычисления компонент базисных векторов и кинематических тензоров в ортогональной декартовой системе отсчета координат, что необходимо для реализации численных схем нелинейного анализа деформируемых тел на основе метода конечных элементов. Описываются тензоры, характеризующие конечную деформацию и произвольное течение среды в разложении по основному и сопряженному базисам в исходной и актуальной конфигурациях, по ортам глобальной декартовой системы отсчета и по главным направлениям правого и левого тензоров искажения. Дается классификация тензоров с выделением группы материальных (лагранжевых) тензоров деформации (тензоров инвариантных) и группы пространственных (эйлеровых) тензоров деформации (тензоров индифферентных). Приводятся соотношения, связывающие между собой тензоры различных групп.

Введение

Применение метода конечных элементов (МКЭ) к расчету тонкостенных конструкций в настоящее время является общепринятым и естественным. Разработке теоретических основ конечно-элементного анализа искривленных оболочек в линейной и нелинейной постановках посвящено значительное число научных публикаций, из которых отметим [1–7]. Среди большого разнообразия предложенных подходов для геометрически нелинейных задач определенными преимуществами обладают так называемые трехмерные вырождающиеся изопараметрические конечные элементы (КЭ) оболочек. Технология построения подобных элементов основана на использовании трехмерных уравнений механики деформируемого твердого тела (МДТТ), введении линейной аппроксимации геометрии и перемещений по толщине и выполнении специфических гипотез теории оболочек в каждой квадратурной точке самостоятельно. Такой подход в полной мере позволяет применять апробированные методики нелинейного анализа трехмерных тел с учетом конечных деформаций, пластичности, ползучести, накопления поврежденности и т.д.

В настоящей работе рассматриваются вопросы кинематики конечных деформаций и произвольных течений трехмерного континуума. Описываются тензоры деформаций и мер деформаций в разложении по основному и сопряженному базисам исходной и актуальной конфигурации, ортам декартовой системы отсчета и главным направлениям тензоров искажения. Излагается технология вычисления этих тензоров и их производных по времени для оболочечных КЭ.

1. Тензоры конечных деформаций

Современное изложение кинематики конечных деформаций в безындексном тензорном виде представлено в монографиях [8–12].

Итак, введем криволинейные лагранжевы координаты ξ^1, ξ^2, ξ^3, которые тождественно совпадают с локальными безразмерными координатами, определенными внутри каждого КЭ самостоятельно, то есть $-1 \le \xi^k \le 1$. Такое отождествление вполне оправдано, так как координаты каждой материальной точки имеют постоянные значения в любой момент времени.

Пусть в исходной конфигурации имеем радиус-вектор материальной точки в виде $\mathbf{R} = X^i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ – орты декартовой системы координат, относительно которой исследуется процесс деформирования. В этой конфигурации определим:

– основной и сопряженный базисы

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^k}\mathbf{e}_i, \mathbf{R}^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial X^i}\mathbf{e}_i;$$

– оператор Гамильтона

$$\nabla_0 = \mathbf{R}^j \frac{\partial}{\partial \xi_j};$$

– метрический тензор

$$(\mathbf{G}) = G_{ij}(\mathbf{R}^i\mathbf{R}^j) = G^{ij}(\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j) = (\mathbf{R}^i\mathbf{R}_i) = \sum_{i,j}\hat{G}_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j),$$

где

$$G_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j, \quad G^{ij} = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j, \quad \hat{G}_{ij} = \sum_{m,n} G^{mn}\frac{\partial X^i}{\partial \xi^m}\frac{\partial X^j}{\partial \xi^n}.$$

По аналогии в актуальном состоянии определим:

– радиус-вектор материальной точки $\mathbf{r} = x^i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\mathbf{e}_i$;

вектор скорости движения (приращения перемещений) этой материальной точки $\boldsymbol{\upsilon} = \dot{x}^i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\mathbf{e}_i = \upsilon^i(\xi^1,\xi^2,\xi^3)\mathbf{e}_i$;

– основной и сопряженный базисы $\mathbf{r}_k = \partial x^i/\partial\xi^k \cdot \mathbf{e}^i$, $\mathbf{r}^k = \partial\xi^k/\partial x^i \cdot \mathbf{e}_i$;

– оператор Гамильтона $\nabla = \mathbf{r}^j\,\partial/\partial\xi^j$;

– метрический тензор

$$(\mathbf{g}) = g_{ij}(\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j) = g^{ij}(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j) = (\mathbf{r}_i\mathbf{r}^i) = (\mathbf{r}^i\mathbf{r}_i) = \sum_{i,j}\hat{g}_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j),$$

где

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j, \quad \hat{g}_{ij} = \sum_{m,n} g^{mn}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^m}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^n}.$$

Базовым примем тензор градиента деформации

$$(\mathbf{F}) = (\nabla_0\mathbf{r})^T = (\mathbf{r}\nabla_0) = \left(\mathbf{e}_i\frac{\partial x^i}{\partial \xi^i}\mathbf{R}^j\right) =$$

$$= (\mathbf{r}_i\mathbf{R}^i) = g_{ki}(\mathbf{r}^k\mathbf{R}^i) = G^{ki}(\mathbf{r}_i\mathbf{R}_k) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j), \qquad (1.1)$$

который преобразует произвольно ориентированный элементарный вектор $d\mathbf{R}$, выделенный в недеформированном состоянии, в актуальную конфигурацию $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{R}, \quad \mathbf{r}_i = (\mathbf{F}) \cdot \mathbf{R}_i. \tag{1.2}$$

Транспонированный к нему тензор $(\mathbf{F})^T$ называют тензором градиента места.

Полярное разложение градиента деформации определяет правый и левый тензоры искажения

$$(\mathbf{F}) = (\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{U}) = (\mathbf{V}) \cdot (\mathbf{R}), \tag{1.3}$$

где $(\mathbf{R})$ – ортогональный тензор, характеризующий вращение элементарного объема как твердого целого. Справедливо представление этих тензоров в виде разложений по главным направлениям:

$$(\mathbf{U}) = \sum_i U_i (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i), \quad (\mathbf{V}) = \sum_i V_i (\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i), \tag{1.4}$$

где выполняется

$$V_i = U_i = \lambda_i, \quad \mathbf{b}_i = (\mathbf{R}) \mathbf{c}_i. \tag{1.5}$$

Известно, что λ_i – относительные удлинения элементарных отрезков, ориентированных в недеформированном состоянии вдоль ортов $\mathbf{c}_i$, которые после деформации изменяют длину и поворачиваются, принимая положение, определяемое ортами $\mathbf{b}_i$.

Группа тензоров, называемых мерами деформаций, состоит:

– из правого тензора Коши–Грина (мера деформации Коши–Грина)

$$(\mathbf{C}) = (\mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{F}) = (\mathbf{R}^i \mathbf{r}_i) \cdot (\mathbf{r}_j \mathbf{R}^j) = g_{ij} (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = \\ = (\mathbf{U}^2) = \sum_i \lambda_i^2 (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i) = (\mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{g}) \cdot (\mathbf{F}); \tag{1.6}$$

– из левого тензора Коши–Грина (мера деформации Фингера)

$$(\mathbf{B}) = (\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{F})^T = (\mathbf{r}_i \mathbf{R}^i) \cdot (\mathbf{R}^j \mathbf{r}_j) = G^{ij} (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) = \\ = (\mathbf{V}^2) = \sum_i \lambda_i^2 (\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i) = (\mathbf{F}) \cdot (\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{F})^T; \tag{1.7}$$

– из правого тензора Пиолы

$$(\mathbf{C}^{-1}) = (\mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T = (\mathbf{R}_i \mathbf{r}^i) \cdot (\mathbf{r}^j \mathbf{R}_j) = g^{ij} (\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j) = \\ = (\mathbf{U}^{-2}) = \sum_i \lambda_i^{-2} (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i) = (\mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{g}) \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T; \tag{1.8}$$

– из левого тензора Пиолы (мера деформации Альманси)

$$(\mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{r}^i \mathbf{R}_i) \cdot (\mathbf{R}_j \mathbf{r}^j) = G_{ij} (\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \\ = (\mathbf{V}^{-2}) = \sum_i \lambda_i^{-2} (\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i) = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}). \tag{1.9}$$

Широко используются тензор деформаций Коши–Грина

$$(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{C}) - (\mathbf{G})] = \frac{1}{2}[g_{ij} - G_{ij}](\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = \frac{1}{2}\sum_i [\lambda_i^2 - 1](\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i) \tag{1.10}$$

и тензор деформации Альманси

$$(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{g}) - (\mathbf{B}^{-1})] = \frac{1}{2}[g_{ij} - G_{ij}](\mathbf{r}^i \mathbf{r}^j) = \frac{1}{2}\sum_i [1 - \lambda_i^{-2}](\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i). \tag{1.11}$$

Эти тензоры характеризуют изменение квадрата длин элементарных отрезков, то есть

$$|d\mathbf{r}|^2 - |d\mathbf{R}|^2 = 2d\mathbf{R}\cdot(\mathbf{E})\cdot d\mathbf{R} = 2d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{A})\cdot d\mathbf{r}. \tag{1.12}$$

Распространение получили логарифмические деформации (меры деформации Генки), определяемые в виде

$$(\mathbf{H}_{\mathbf{U}}) = (\ln \mathbf{U}) = \sum_i \ln \lambda_i (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i) = \frac{1}{2}(\ln \mathbf{C}), \tag{1.13}$$

$$(\mathbf{H}_{\mathbf{V}}) = (\ln \mathbf{V}) = \sum_i \ln \lambda_i (\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i) = \frac{1}{2}(\ln \mathbf{B}). \tag{1.14}$$

Приведенные выражения тензоров в виде разложения по главным направлениям свидетельствуют о том, что все симметричные тензоры, которые характеризуют "чистую деформацию" (свободную от вращений тела как жесткого целого), имеют два базиса разложения: либо ($\mathbf{c}_i\,\mathbf{c}_i$), либо ($\mathbf{b}_i\,\mathbf{b}_i$). Представителей первой группы – тензоры $(\mathbf{U}),(\mathbf{C}),(\mathbf{C}^{-1}),(\mathbf{E}),(\mathbf{H}_{\mathbf{U}})$ – называют материальными тензорами, и все они тензоры инвариантные [9–11]; представителей второй группы – $(\mathbf{V}),(\mathbf{B}),(\mathbf{B}^{-1})$, $(\mathbf{A}),(\mathbf{H}_{\mathbf{V}})$ – называют пространственными индифферентными тензорами. Преобразование материального тензора в пространственный тензор с помощью тензора вращения ($\mathbf{R}$) проводится следующим образом:

$$(\mathbf{V}) = (\mathbf{R})\cdot(\mathbf{U})\cdot(\mathbf{R})^T, \quad (\mathbf{B}) = (\mathbf{R})\cdot(\mathbf{C})\cdot(\mathbf{R})^T,$$
$$(\mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{R})\cdot(\mathbf{C}^{-1})\cdot(\mathbf{R})^T, \quad (\mathbf{H}_{\mathbf{V}}) = (\mathbf{R})\cdot(\mathbf{H}_{\mathbf{U}})\cdot(\mathbf{R})^T. \tag{1.15}$$

Альтернативным вариантом обоснования классификации введенных тензоров является "отнесение" их либо к метрическому тензору исходного состояния ($\mathbf{G}$), либо к метрическому тензору текущей конфигурации ($\mathbf{g}$). В первом случае тензоры называют лагранжевыми (материальными), во втором – эйлеровыми (пространственными). Преобразование тензоров одного класса к другому проводится с помощью градиента деформаций ($\mathbf{F}$) и так называемых преобразований "push-forward" и "pull-backs" [13–16]. Первое из них переводит эйлеров тензор в лагранжев, второе – наоборот. При этом различают разложение метрических тензоров по основному базису (используются контравариантные компоненты метрических тензоров) и по сопряженному базису (используются ковариантные компоненты метрических тензоров).

Таким образом, "pull-backs"-преобразование пространственного тензора (1.11) в материальный тензор (1.10) при условии, что оба тензора определены в виде ковариантных компонент, записывается в виде:

$$(\mathbf{E}) = (\mathbf{F})^T\cdot(\mathbf{A})\cdot(\mathbf{F}). \tag{1.16}$$

Последнее представление тензора деформаций (1.6) имеет вид преобразования метрического тензора текущей конфигурации ($\mathbf{g}$) в исходный базис по соотношению (1.16). В связи с этим тензор ($\mathbf{C}$) называют также "сопутствующим метрическим тензором текущей конфигурации" (convectived current metric tensor [14]). Пример аналогичного преобразования тензоров, представленных в основном базисе, дает последнее представление в (1.8).

Обратное преобразование лагранжева тензора ($\mathbf{E}$) в эйлеров тензор ($\mathbf{A}$) имеет вид:

$$(\mathbf{A}) = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}). \tag{1.17}$$

Аналогично преобразуется метрический тензор $(\mathbf{G})$ в левый тензор Пиолы (1.9). Поэтому тензор $(\mathbf{B}^{-1})$ называют "сопутствующим метрическим тензором исходной конфигурации" (convectived reference metric tensor [14]). Подобное преобразование тензоров, заданных контравариантными компонентами, определяется в виде последнего представления в (1.7).

Отметим, что преобразования типа (1.16), (1.17) обладают тем свойством, что соответствующие ковариантные или контравариантные компоненты тензоров сохраняют свои выражения и меняется лишь базис (исходный на актуальный и наоборот). Преобразование типа (1.14) дает аналогичный результат, но в представлении тензоров в виде разложения по собственным базисам.

Определенное распространение [16–22] получило представление тензоров деформации с помощью операторов проецирования

$$(\mathbf{P}_i^{\mathbf{L}}) = (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i) = \frac{[(\mathbf{C}) - \lambda_j^2(\mathbf{I})] \cdot [(\mathbf{C}) - \lambda_k^2(\mathbf{I})]}{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)} =$$

$$= \frac{(g_{mn} - \lambda_j^2 G_{mn})\, G^{nl}\, (g_{lt} - \lambda_k^2 G_{lt})}{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)} (\mathbf{R}^m \mathbf{R}^t), \quad i \neq j \neq k, \tag{1.18}$$

$$(\mathbf{P}_i^{\mathbf{E}}) = (\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i) = \frac{[(\mathbf{B}) - \lambda_j^2(\mathbf{I})] \cdot [(\mathbf{B}) - \lambda_k^2(\mathbf{I})]}{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)} =$$

$$= \frac{(G^{mn} - \lambda_j^2 g^{mn})\, g_{nl}\, (G^{lt} - \lambda_k^2 g^{lt})}{(\lambda_i^2 - \lambda_j^2)(\lambda_i^2 - \lambda_k^2)} (\mathbf{r}_m \mathbf{r}_t), \quad i \neq j \neq k, \tag{1.19}$$

которые связаны между собой соотношением типа (1.15):

$$(\mathbf{P}_i^{\mathbf{E}}) = (\mathbf{R}) \cdot (\mathbf{P}_i^{\mathbf{L}}) \cdot (\mathbf{R})^T. \tag{1.20}$$

Введем группу инвариантных тензоров, которые назовем материальными (лагранжевыми) тензорами деформаций, в виде:

$$(\mathbf{E}^f) = \sum_i f(\lambda_i)(\mathbf{P}_i^{\mathbf{L}}) = E_{ij}^f (\mathbf{R}^i \mathbf{R}^j) = E_f^{ij} (\mathbf{R}_i \mathbf{R}_j). \tag{1.21}$$

В зависимости от вида скалярной функции $f(\lambda_i)$ соответствующий тензор будет соответствовать ранее введенным тензорам. Например:

– при $f(\lambda_i) = \lambda_i$ имеем $(\mathbf{E}^f) = (\mathbf{U}) = (\mathbf{E}^{\mathbf{U}})$, то есть тензор (1.21) есть правый тензор искажения (1.3);

– при $f(\lambda_i) = \lambda_i^2$ имеем $(\mathbf{E}^f) = (\mathbf{C}) = (\mathbf{E}^{\mathbf{C}})$, то есть тензор (1.21) есть правый тензор Коши–Грина (мера деформации Коши–Грина) (1.6);

– при $f(\lambda_i) = \dfrac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1)$ имеем $(\mathbf{E}^f) = (\mathbf{E})$, то есть тензор (1.21) есть тензор деформаций Коши–Грина (1.10);

– при $f(\lambda_i) = \dfrac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2})$ имеем $(\mathbf{E}^f) = (\mathbf{E}^{\mathbf{A}})$ и тензор (1.21) – это один из возможных материальных аналогов тензора деформаций Альманси (1.11);

– при $f(\lambda_i) = \ln \lambda_i$ имеем $(\mathbf{E}^f) = (\ln \mathbf{U}) = (\mathbf{E}^{\mathbf{H}})$, то есть тензор (1.21) есть тензор логарифмических деформаций (1.13).

По аналогии введем группу индифферентных тензоров, которые назовем пространственными (эйлеровыми):

$$(\mathbf{A}^f) = \sum_i f(\lambda_i)(\mathbf{P}_i^{\mathbf{E}}) = A_{ij}^f(\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j) = A_f^{ij}(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j). \tag{1.22}$$

Очевидно, что

– при $f(\lambda_i)=\lambda_i$ имеем $(\mathbf{A}^f)=(\mathbf{V})=(\mathbf{A}^{\mathbf{V}})$, то есть тензор (1.22) есть левый тензор искажения (1.3);

– при $f(\lambda_i)=\lambda_i^2$ имеем $(\mathbf{A}^f)=(\mathbf{B})=(\mathbf{A}^{\mathbf{B}})$, то есть тензор (1.22) есть левый тензор Коши–Грина (мера деформации Фингера) (1.7);

– при $f(\lambda_i)=\lambda_i^{-2}$ имеем $(\mathbf{A}^f)=(\mathbf{B}^{-1})=(\mathbf{A}^{\mathbf{B}^{-1}})$, то есть тензор (1.22) есть левый тензор Пиолы (мера деформации Альманси) (1.9);

– при $f(\lambda_i)=\dfrac{1}{2}(\lambda_i^2-1)$ имеем $(\mathbf{A}^f)=(\mathbf{A}^{\mathbf{E}})$ и тензор (1.22) – это пространственный аналог тензора деформаций Коши–Грина (1.10);

– при $f(\lambda_i)=\dfrac{1}{2}(1-\lambda_i^{-2})$ имеем $(\mathbf{A}^f)=(\mathbf{A})$, то есть тензор (1.22) есть тензор деформаций Альманси (1.11);

– при $f(\lambda_i)=\ln\lambda_i$ имеем $(\mathbf{A}^f)=(\ln\mathbf{V})=(\mathbf{A}^{\mathbf{H}})$, то есть тензор (1.22) есть тензор логарифмических деформаций (1.14).

Представление множества возможных тензоров конечных деформаций в виде (1.21), (1.22) несколько неудобно в практической реализации, поскольку требует вычисления в каждой точке операторов (1.18), (1.19). Однако такое представление дает возможность строить сопряженные пары тензоров напряжений и деформаций, что позволяет обоснованно получать физические соотношения из уравнений термодинамики.

2. Тензоры скоростей деформаций

Базовым тензором, характеризующим скорость течения среды, является тензор пространственного градиента скорости

$$(\mathbf{h}) = (\dot{\mathbf{F}})\cdot(\mathbf{F}^{-1}) = (\boldsymbol{\upsilon}_i\mathbf{r}^i) = \frac{\partial \upsilon^i}{\partial x^j}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j), \tag{2.1}$$

который характеризует скорость движения произвольного элементарного вектора

$$d\dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{h})\cdot d\mathbf{r}, \quad \dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{h})\cdot\mathbf{r}_i. \tag{2.2}$$

Широко используется симметричная часть тензора (2.1) $(\mathbf{d})$ (тензор деформации скорости, "stretching tensor") и антисимметричная – $(\boldsymbol{\omega})$ (тензор скорости вращения, "vorticity tensor").

Производные по времени от инвариантных материальных тензоров являются тензорами материальными и инвариантными. Наиболее просто они определяются в исходном базисе, то есть в виде

$$(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2}\dot{g}_{ij}(\mathbf{R}^i\mathbf{R}^j). \tag{2.3}$$

При использовании представления в виде (1.21) или в виде разложения по собственным значениям выражение для производной получается более сложным:

$$(\dot{\mathbf{E}}^f) = \sum_i f_\lambda'\dot{\lambda}_i(\mathbf{P}_i^{\mathbf{L}}) + (\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{U}})\cdot(\mathbf{E}^f) - (\mathbf{E}^f)\cdot(\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{U}}), \tag{2.4}$$

где введен кососимметричный тензор [10]

$$(\mathbf{\Omega}_U)-(\dot{\mathbf{c}}_k\mathbf{c}_k)=\sum_{i\neq j}\frac{2\lambda_i\lambda_k}{\lambda_k^2-\lambda_i^2}[\mathbf{b}_i\cdot(\mathbf{d})\cdot\mathbf{b}_k](\mathbf{c}_i\mathbf{c}_k)=$$

$$=(\mathbf{R})^T\cdot\left[\sum_{i\neq j}\frac{2\lambda_i\lambda_k}{\lambda_k^2-\lambda_i^2}(\mathbf{P}_i^{\mathbf{E}})\cdot(\mathbf{d})\cdot(\mathbf{P}_k^{\mathbf{E}})\right]\cdot(\mathbf{R}). \qquad (2.5)$$

Дифференцирование по времени пространственных тензоров – процедура более сложная. Главная трудность состоит в том, что тензоры, получающиеся непосредственным дифференцированием по времени, являются тензорами необъективными. Поэтому вводятся обобщенные (объективные, коротационные) производные, которые уже являются тензорами индифферентными. Рассмотрим основные типы таких производных.

Производная Яуманна (Jaumann rate):

$$(\mathfrak{R}^J\mathbf{A}^f)=(\mathbf{A}^f)-(\boldsymbol{\omega})\cdot(\mathbf{A}^f)+(\mathbf{A}^f)\cdot(\boldsymbol{\omega}). \qquad (2.6)$$

Обычно используется в линейных физических соотношениях для скоростей напряжений.

Производная Грина–Нагди (Green–Naghdi rate):

$$(\mathfrak{R}^G\mathbf{A}^f)=(\mathbf{R})\cdot\frac{d}{dt}\Big[(\mathbf{R})^T\cdot(\mathbf{A}^f)\cdot(\mathbf{R})\Big]\cdot(\mathbf{R})^T=$$

$$=(\mathbf{R})\cdot(\dot{\mathbf{E}}^f)\cdot(\mathbf{R})^T=(\dot{\mathbf{A}}^f)-(\mathbf{\Omega})\cdot(\mathbf{A}^f)+(\mathbf{A}^f)\cdot(\mathbf{\Omega}), \qquad (2.7)$$

где появляется кососимметричный тензор спина

$$(\mathbf{\Omega})=(\dot{\mathbf{R}})\cdot(\mathbf{R})^T=(\boldsymbol{\omega})+\sum_{i\neq j}\frac{\lambda_j-\lambda_i}{\lambda_j+\lambda_i}(\mathbf{P}_i^E)\cdot(\mathbf{d})\cdot(\mathbf{P}_j^E). \qquad (2.8)$$

Эта производная широко используется в современной нелинейной механике сплошных сред в самых различных ситуациях.

Производная Ли (Lie derivative). Различают два типа таких производных. Первый основан на преобразованиях (1.16), (1.17) и используется для ковариантных компонент тензора деформаций:

$$(\hat{\mathfrak{R}}^\wedge\mathbf{A}^f)=(\mathbf{F}^{-1})^T\cdot\frac{d}{dt}\Big[(\mathbf{F})^T\cdot(\mathbf{A}^f)\cdot(\mathbf{F})\Big]\cdot(\mathbf{F}^{-1})=$$

$$=(\dot{\mathbf{A}}^f)+(\mathbf{h})^T\cdot(\mathbf{A}^f)+(\mathbf{A}^f)\cdot(\mathbf{h})=\dot{A}_{ij}^f(\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j). \qquad (2.9)$$

В литературе эта производная называется производной Коттона–Ривлина (Cotton–Rivlin rate). Второй тип производной типа Ли предназначен для тензоров, определенных контравариантными компонентами, и имеет представление

$$(\breve{\mathfrak{R}}^\wedge\mathbf{A}^f)=(\mathbf{F})\cdot\frac{d}{dt}\Big[(\mathbf{F}^{-1})\cdot(\mathbf{A}^f)\cdot(\mathbf{F}^{-1})^T\Big]\cdot(\mathbf{F})^T=$$

$$=(\dot{\mathbf{A}}^f)-(\mathbf{h})^T\cdot(\mathbf{A}^f)-(\mathbf{A}^f)\cdot(\mathbf{h})=\dot{A}_f^{ij}(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j). \qquad (2.10)$$

Такая конструкция называется также производной Олдройда (Oldroyd rate).

Введение этой производной позволяет записать соотношение

$$(\mathbf{d}) = (\widehat{\mathfrak{R}}^{\Lambda}\mathbf{A}) = (\breve{\mathfrak{R}}^{\Lambda}\mathbf{A}^{\mathbf{E}}), \tag{2.11}$$

то есть производная Ли тензора деформаций Альманси определяет тензор деформации скорости.

Логарифмическая производная [17, 18]

$$(\mathfrak{R}^{\ln}\mathbf{A}^{f}) = (\dot{\mathbf{A}}^{f}) - (\mathbf{\Omega}_{\ln})\cdot(\mathbf{A}^{f}) + (\mathbf{A}^{f})\cdot(\mathbf{\Omega}_{\ln}), \tag{2.12}$$

где появляется кососимметричный тензор

$$(\mathbf{\Omega}_{\ln}) = (\boldsymbol{\omega}) + \sum_{i\neq j}\left[\frac{\lambda_j^2+\lambda_i^2}{\lambda_j^2-\lambda_i^2} + \frac{1}{\ln\lambda_i - \ln\lambda_j}\right](\mathbf{P}_i^{\mathbf{E}})\cdot(\mathbf{d})\cdot(\mathbf{P}_j^{\mathbf{E}}), \tag{2.13}$$

вызывает интерес в связи со справедливостью соотношения

$$(\mathbf{d}) = (\mathfrak{R}^{\ln}\mathbf{A}^{\mathbf{H}}) = (\mathfrak{R}^{\ln}\mathbf{H}_{\mathbf{V}}), \tag{2.14}$$

то есть логарифмическая производная пространственного тензора деформаций Генки определяет тензор деформации скорости.

Для пространственной производной

$$(\mathfrak{R}^{\mathbf{V}}\mathbf{A}^{f}) = (\dot{\mathbf{A}}^{f}) - (\mathbf{\Omega}_{\mathbf{V}})\cdot(\mathbf{A}^{f}) + (\mathbf{A}^{f})\cdot(\mathbf{\Omega}_{\mathbf{V}}), \tag{2.15}$$

где фигурирует кососимметричный тензор [10, 20]

$$(\mathbf{\Omega}_{\mathbf{V}}) = (\boldsymbol{\omega}) + \sum_{i\neq j}\frac{\lambda_j^2+\lambda_i^2}{\lambda_j^2-\lambda_i^2}(\mathbf{P}_i^{\mathbf{E}})\cdot(\mathbf{d})\cdot(\mathbf{P}_j^{\mathbf{E}}), \tag{2.16}$$

справедливо соотношение

$$(\mathfrak{R}^{\mathbf{V}}\mathbf{A}^{f}) = \sum_i f_\lambda'\dot{\lambda}_i(\mathbf{P}_i^{\mathbf{E}}), \tag{2.17}$$

то есть эта производная в собственном базисе имеет простейший вид.

Приведем два полезных соотношения, связывающих между собой основные меры скоростей деформаций:

$$(\dot{\mathbf{B}}) = (\mathbf{h})\cdot(\mathbf{B}) + (\mathbf{B})\cdot(\mathbf{h})^{T}, \tag{2.18}$$

$$(\mathbf{d}) = (\mathbf{F}^{-1})^{T}\cdot(\dot{\mathbf{E}})\cdot(\mathbf{F}^{-1}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{F})\cdot(\dot{\mathbf{C}}^{-1})\cdot(\mathbf{F})^{T}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим дополнительные формы представления тензора деформации скорости, который является базовым тензором и, будучи свернут с тензором истинных напряжений Коши–Эйлера, определяет мощность внутренних сил. Введем его разложения по различным базисам:

$$(\mathbf{d}) = d_{ij}^{b}(\mathbf{b}_i\mathbf{b}_j) = d_{ij}(\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j) = d^{ij}(\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j). \tag{2.20}$$

Материальный аналог этого тензора определяется в виде:

$$(\mathbf{l}) = (\mathbf{R})^{T}\cdot(\mathbf{d})\cdot(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}[(\dot{\mathbf{U}})\cdot(\mathbf{U}^{-1}) + (\mathbf{U}^{-1})\cdot(\dot{\mathbf{U}})] =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{-1})\cdot(\dot{\mathbf{C}})\cdot(\mathbf{U}^{-1}) = d_{ij}^{b}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j) \tag{2.21}$$

и известен как тензор пространственной меры скорости искажения ("unrotated strain rate tensor"). Он определяет скорость деформаций во вращающейся системе координат, в которой исключаются повороты элементарного объема как жесткого целого.

Известен вариант представления тензора (2.20) через левый тензор искажения:

$$(\mathbf{d}) = \frac{1}{2}[(\mathbf{V}^{\mathbf{G}}) \cdot (\mathbf{V}^{-1}) + (\mathbf{V}^{-1}) \cdot (\mathbf{V}^{\mathbf{G}})], \tag{2.22}$$

где фигурирует производная Грина–Нагди $(\mathbf{V}^{\mathbf{G}}) = (\mathfrak{R}^{\mathbf{G}} \mathbf{A}^{\mathbf{V}})$.

Для того чтобы можно было воспользоваться представлениями (2.4), (2.17) и др., приведем известное уравнение

$$\frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = \frac{d}{dt} \ln \lambda_i = d^{\,b}_{ii}, \tag{2.23}$$

которое стимулирует широкое применение логарифмических деформаций. Также из (2.23) следует, что

$$f'_{\lambda}\dot{\lambda}_i = f'_{\lambda}\lambda_i d^{b}_{ii}. \tag{2.24}$$

Соотношения (2.11), (2.14), (2.19), (2.21) и (2.22) позволяют представить тензор деформации скорости в виде специальных дифференциальных (по времени) соотношений относительно различных тензоров конечных деформаций. Каждая формула абсолютно точна и не содержит никаких оговорок и предположений. Поэтому вполне возможно использовать любой из тензоров деформаций, введенных в первом разделе, в качестве базового при реализации конкретной методики численного анализа. Подтверждением тому является большое число публикаций по реализации различных схем моделирования конечных деформаций сплошных сред.

3. Кинематика конечного элемента

Как упоминается во введении, изопараметрические трехмерные КЭ оболочек строятся по трехмерным уравнениям МДТТ с использованием численного интегрирования по объему, введением линейной аппроксимации по толщине и применением специальных процедур учета малости напряжений обжатия и исключения мембранного и сдвигового "запирания" [6, 7].

Пусть поперечной координатой будет $-1 \le \xi^3 \le +1$. Введем изопараметрические аппроксимации геометрии в исходном и деформированном состояниях:

$$\mathbf{R}(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \sum_k \{\mathbf{R}_{(k)} + \xi^3 \mathbf{N}_{(k)}\} H_{(k)}(\xi^1,\xi^2), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{r}(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \sum_k \{\mathbf{r}_{(k)} + \xi^3 \mathbf{n}_{(k)}\} H_{(k)}(\xi^1,\xi^2), \tag{3.2}$$

где $H_{(k)}(\xi^1,\xi^2)$ – функции формы, определяющие аппроксимации по поверхностным координатам, $\mathbf{R}_{(k)},\mathbf{N}_{(k)}$ – узловые значения радиус-вектора срединной поверхности и вектора, соединяющего соответствующие узлы на лицевых поверхностях, $\mathbf{r}_{(k)},\mathbf{n}_{(k)}$ – неизвестные узловые значения аналогичных векторов в актуальной конфигурации. На практике обычно неизвестными являются приращения величин, определяющих геометрию. Это либо глобальные векторы перемещений и поворотов

$$\mathbf{u}_{(k)} = \mathbf{r}_{(k)} - \mathbf{R}_{(k)}, \quad \boldsymbol{\theta}_{(k)} = \mathbf{n}_{(k)} - \mathbf{N}_{(k)}, \tag{3.3}$$

либо приращения векторов $\mathbf{r}_{(k)}$, $\mathbf{n}_{(k)}$ на текущем шаге нагружения

$$\Delta^{l+1}\mathbf{u}_{(k)} = {}^{l+1}\mathbf{r}_{(k)} - {}^{l}\mathbf{r}_{(k)}, \quad \Delta^{l+1}\boldsymbol{\theta}_{(k)} = {}^{l+1}\mathbf{n}_{(k)} - {}^{l}\mathbf{n}_{(k)}. \tag{3.4}$$

Здесь ${}^{0}\mathbf{r}_{(k)} = \mathbf{R}_{(k)}$, ${}^{0}\mathbf{n}_{(k)} = \mathbf{N}_{(k)}$.

Базисные векторы и компоненты метрического тензора определяются в виде:

$$\mathbf{R}_{\alpha} = \sum_{k}\{\mathbf{R}_{(k)} + \xi^{3}\mathbf{N}_{(k)}\}\frac{\partial H_{(k)}}{\partial \xi^{\alpha}}, \ \alpha = 1,2, \quad \mathbf{R}_{3} = \sum_{k}\mathbf{N}_{(k)}H(k), \tag{3.5}$$

$$\mathbf{R}^{k} = \frac{1}{2\sqrt{G}}\in^{kij}\mathbf{R}_{i}\times\mathbf{R}_{j}, \quad \sqrt{G} = \mathbf{R}_{1}\cdot[\mathbf{R}_{2}\times\mathbf{R}_{3}] = \det\left|G_{ij}\right|. \tag{3.6}$$

Компоненты метрического тензора определяются по обычным соотношениям.

В актуальной конфигурации соответствующие значения определяются аналогично, то есть

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \sum_{k}\{\mathbf{r}_{(k)} + \xi^{3}\mathbf{n}_{(k)}\}\frac{\partial H_{(k)}}{\partial \xi^{\alpha}}, \ \alpha = 1,2, \quad \mathbf{r}_{3} = \sum_{k}\mathbf{n}_{(k)}H(k), \tag{3.7}$$

$$\mathbf{r}^{k} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\in^{kij}\mathbf{r}_{i}\times\mathbf{r}_{j}, \quad \sqrt{g} = \det\left|g_{ij}\right|. \tag{3.8}$$

Отметим, что хотя сопряженный базис зависит от неизвестных $r_{(k)}, n_{(k)}$ нелинейным образом, определять соответствующие аналитические выражения нет необходимости. Так как все вычисления проводятся в системе фиксированных точек (квадратурных точек) в виде проекций относительно глобального базиса $\mathbf{e}_{i}$, то вполне достаточно определить алгоритм (последовательность) вычисления конечных значений соответствующих компонент тензоров.

Итак, пусть $\xi^{j}_{(m)}$ – координаты квадратурных точек. Векторы (3.5) в этих точках будут определяться в виде проекций

$$\mathbf{R}^{(m)}_{\alpha} = \sum_{k}\{\mathbf{R}_{(k)} + \xi^{3}_{(m)}\mathbf{N}_{(k)}\}\frac{\partial H_{(k)}(\xi^{1}_{(m)},\xi^{2}_{(m)})}{\partial \xi^{\alpha}} = X^{i,(m)}_{\alpha}\mathbf{e}_{i}, \ \alpha = 1,2,$$

$$\mathbf{R}^{(m)}_{\alpha} = \sum_{i}\mathbf{N}_{(k)}H_{(k)}(\xi^{1}_{(m)},\xi^{2}_{(m)}) = X^{i,(m)}_{3}\mathbf{e}_{i}. \tag{3.9}$$

Компоненты метрического тензора определяются суммой

$$G^{(m)}_{ij} = \mathbf{R}^{(m)}_{i}\cdot\mathbf{R}^{(m)}_{j} = \sum_{k}X^{k,(m)}_{i}X^{k,(m)}_{j}. \tag{3.10}$$

По (3.6) определяем

$$\mathbf{R}^{k}_{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{G_{m}}}\in^{kij}\mathbf{R}^{(m)}_{i}\times\mathbf{R}^{(m)}_{j} = X^{k,i}_{(m)}\mathbf{e}_{i}, \tag{3.11}$$

$$G^{ij}_{(m)} = \mathbf{R}^{i}_{(m)}\cdot\mathbf{R}^{j}_{(m)} = \sum_{k}X^{i,k}_{(m)}X^{j,k}_{(m)}. \tag{3.12}$$

По аналогии в деформированном состоянии получаем

$$\mathbf{r}^{(m)}_{k} = x^{i,(m)}_{k}\mathbf{e}_{i}, \quad \mathbf{r}^{(k)}_{(m)} = x^{k,i}_{(m)}\mathbf{e}_{i}, \tag{3.13}$$

где $x^{i,(m)}_{k}$ является линейной функций от $\mathbf{r}_{(k)}, \mathbf{n}_{(k)}$, но $x^{k,i}_{(m)}$ таковой не является. Как правило, в численных алгоритмах возникает необходимость вычисления векторов (3.13) по известным значениям ${}^{l}\mathbf{r}_{(k)}, {}^{l}\mathbf{n}_{(k)}$ на текущем шаге нагружения, что не представляет проблемы.

Все тензоры, определенные в первом разделе, которые описывают кинематику конечных деформаций, также определяются в общем базисе $\mathbf{e}_i$. Например, градиент деформаций (1.1) допускает представление

$$(\mathbf{F}^{(m)}) = (\mathbf{r}_k^{(m)}\mathbf{R}^k_{(m)}) = \left[\sum_k x_k^{i,(m)} X^{k,j}_{(m)}\right](\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} F_{ij}^{(m)}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j). \tag{3.14}$$

Правый тензор Коши–Грина (1.6) определяется в виде

$$(\mathbf{C}^{(m)}) = (\mathbf{F}^{(m)})^T \cdot (\mathbf{F}^{(m)}) = \left[\sum_k F_{ki}^{(m)} F_{kj}^{(m)}\right](\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} C_{ij}^{(m)}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j). \tag{3.15}$$

Отметим, что при описанной схеме действий все вычисления практически сводятся к матричному исчислению.

Чтобы воспользоваться представлением тензоров через собственные значения, достаточно решить кубическое уравнение

$$-\gamma^3 + I_{1C}\lambda^2 - I_{2C}\gamma + I_{3C} = 0, \tag{3.16}$$

корни которого дают квадраты относительных удлинений, то есть $\lambda_i = \sqrt{\gamma_i}$. Известно, что характеристическое уравнение (3.16) с коэффициентами, равными инвариантам меры деформаций Коши–Грина (3.15), всегда имеет положительные действительные корни.

Вычислять в явном виде главный базис нет необходимости, так как можно воспользоваться представлениями (1.21), (1.22). Ортогональный тензор полярного разложения (1.3) определяется как

$$(\mathbf{R}) = (\mathbf{F})\cdot(U^{-1}), \tag{3.17}$$

где [23]

$$(U^{-1}) = \gamma_1[\gamma_2(I) + \gamma_3(C) + \gamma_4(C^2)], \tag{3.18}$$

$$\gamma_1 = [I_{3U}(I_{1U}I_{2U} - I_{3U})]^{-1}, \quad \gamma_2 = I_{1U}I_{2U}^2 - I_{3U}(I_{1U}^2 - I_{2U}),$$

$$\gamma_3 = -I_{3U} - I_{1U}(I_{1U}^2 - 2I_{2U}), \quad \gamma_4 = -I_{1U}.$$

Теперь перейдем к технологии вычисления тензоров скоростей деформаций, определенных в п. 2. Введенные значения скоростей являются глобальными неизвестными, и необходимо выделять этот вектор в явном виде и обеспечить линейность относительно него соответствующих тензоров. В задачах статики физический смысл вектора скорости меняется, и он трактуется как приращение вектора перемещений или текущего значения радиус-вектора материальной точки. Тем не менее технология постановки и решения глобальной задачи здесь не меняется [11].

Определим в качестве глобальных неизвестных следующий вектор:

$$\upsilon(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \sum_k \{\dot{\mathbf{r}}_{(k)} + \xi^3\dot{\mathbf{n}}_{(k)}\}H_{(k)}(\xi^1,\xi^2). \tag{3.19}$$

По аналогии с (3.7) получим пространственный градиент этого вектора

$$\upsilon_\alpha = \sum_k \{\dot{\mathbf{r}}_{(k)} + \xi^3\dot{\mathbf{n}}_{(k)}\}\frac{\partial H_{(k)}}{\partial\xi^\alpha}, \ \alpha = 1,2, \quad \upsilon_3 = \sum_k \dot{\mathbf{n}}_{(k)}H_{(k)}, \tag{3.20}$$

для проекций которого в квадратурных точках справедливы выражения

$$\upsilon_{\alpha}^{i,(m)}=\sum_k\{\dot{x}_{(k)}^i+\xi_{(m)}^3\dot{n}_{(k)}^i\}\frac{\partial H_{(k)}(\xi_{(m)}^1,\xi_{(m)}^2)}{\partial\xi^{\alpha}},$$

$$\upsilon_3^{i,(m)}=\sum_k\dot{n}_{(k)}^iH_{(k)}(\xi_{(m)}^1,\xi_{(m)}^2). \qquad (3.21)$$

Запишем эти выражения в структурном виде:

$$\upsilon_j^{i,(m)}=\sum_k\{\dot{x}_{(k)}^i\mathrm{P}_{j,(k)}^{(m)}+\dot{n}_{(k)}^i\Phi_{j,(k)}^{(m)}\}. \qquad (3.22)$$

Определим тензор (2.1). С учетом обозначений (3.13) и (3.22) получим:

$$(\mathbf{h}^{(m)})=(\boldsymbol{\upsilon}_j\mathbf{r}^j)=\sum_{i,j}h_{ij}^{(m)}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j)=$$

$$=\sum_{i,j}\left[\sum_k\left\{\dot{x}_{(k)}^i\sum_l\mathrm{P}_{l,(k)}^{(m)}x_{(m)}^{l,j}+\dot{n}_{(k)}^i\sum_l\Phi_{l,(k)}^{(m)}x_{(m)}^{l,j}\right\}\right](\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j). \qquad (3.23)$$

Этот тензор линейно зависит от неизвестных $\dot{\mathbf{r}}_{(k)},\dot{\mathbf{n}}_{(k)}$. Следовательно, тензоры $(\mathbf{d})$ (тензор деформации скорости) и $(\boldsymbol{\omega})$ легко определяются в виде линейных функций от $\dot{\mathbf{r}}_{(k)},\dot{\mathbf{n}}_{(k)}$. С помощью соотношений (2.5), (2.8), (2.13), (2.16), (2.18), (2.19), (2.21) определяются соответствующие тензоры, необходимые для построения материальных производных тензоров деформаций, введенных в п. 1.

В качестве примера приведем соотношения для скорости изменения тензора деформаций Коши–Грина (1.10). Для этого определим

$$\dot{g}_{nl}^{(m)}=\upsilon_n^{(m)}\cdot r_l^{(m)}+r_n^{(m)}\cdot\upsilon_l^{(m)}=$$

$$=\sum_i\left[x_n^{i,(m)}\sum_k\{\dot{x}_{(k)}^i\mathrm{P}_{l,(k)}^{(m)}+\dot{n}_{(k)}^i\Phi_{l,(k)}^{(m)}\}+x_l^{i,(m)}\sum_k\{\dot{x}_{(k)}^i\mathrm{P}_{n,(k)}^{(m)}+\dot{n}_{(k)}^i\Phi_{n,(k)}^{(m)}\}\right]=$$

$$=\sum_{i,k}\left\{\dot{x}_{(k)}^i[x_n^{i,(m)}\mathrm{P}_{l,(k)}^{(m)}+x_l^{i,(m)}\mathrm{P}_{n,(k)}^{(m)}]+\dot{n}_{(k)}^i[x_n^{i,(m)}\Phi_{l,(k)}^{(m)}+x_l^{i,(m)}\Phi_{n,(k)}^{(m)}]\right\} \qquad (3.24)$$

и далее тензор

$$(\dot{\mathbf{E}}^{(m)})=\frac{1}{2}\dot{g}_{rq}^{(m)}(\mathbf{R}_{(m)}^r\mathbf{R}_{(m)}^q)=\frac{1}{2}\dot{g}_{rq}^{(m)}X_{(m)}^{r,i}X_{(m)}^{q,i}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j). \qquad (3.25)$$

Таким образом, по описанной методике могут быть вычислены все кинематические характеристики деформируемой среды при произвольных по величине деформациях. При этом тензоры, характеризующие скорости деформаций, получаются линейными от кинематических скоростей, что дает возможность построить линейную систему алгебраических уравнений на шаге нагружения. Разумеется, вычислять все приведенные выше тензоры в рамках одной методики решения задачи нет необходимости, так как различные методики предполагают применение лишь некоторых из тензоров, описанных в п. 1, 2.

Выводы

Представленная технология вычисления тензоров, характеризующих конечные деформации, применительно к оболочкам может служить основой для соответствующей программной реализации. Соотношения, представленные в настоящей статье, являются "рабочим инструментом" для решения этой проблемы. Отметим, что в научной литературе предложено множество различных подходов, в которых методики трехмерного нелинейного анализа деформируемых сред применяются для анализа оболочек [14, 24–31].

Ключевые слова: изопараметрическая аппроксимация, базисные векторы, кинематические тензоры, ортогональная декартовая система координат, основной и сопряженный базис, произвольное течение среды, инвариантные тензоры, индиферентные тензоры.

Литература

1. Finite element for thin shell and curved members / Ed. D.S. Ashwell. – Wiley, 1976.

2. Finite element methods for plate and shell structures. V. 1: Element Technology / Ed. T.J.R. Hughes, E. Hinton. – Pineridg P.I., 1986. – 446 p.

3. *Рикардс, Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р.Б. Рикардс. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.

4. *Голованов, А.И.* Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек / А.И. Голованов, М.С. Корнишин. – Казань, 1989. – 270 с.

5. Computational Mechanics of Nonlinear Response of Shells / Ed. W.B. Kratzig, E. Onate. – Springer-Verlag, 1990. – 406 p.

6. *Голованов, А.И.* Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций / А.И. Голованов, А.В. Песошин, О.Н. Тюленева. – Казань: КГУ, 2005. – 442 с.

7. *Голованов, А.И.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А.И. Голованов, О.Н. Тюленева, А.Ф. Шигабутдинов. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.

8. *Лурье, А.И.* Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

9. *Левитас, В.И.* Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении / В.И. Левитас. – Киев: Наукова думка, 1987. – 232 с.

10. *Поздеев, А.А.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритм, приложения / А.А. Поздеев, П.В. Трусов, Ю.И. Няшин. – М.: Наука, 1986. – 232 с.

11. *Коробейников, С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел / С.Н. Коробейников. – Новосибирск, 2000. – 262 с.

12. *Работягов, Д.Д.* Механика материалов при больших деформациях / Д.Д. Работягов. – Кишинев: Штиинца, 1975. – 168 с.

13. *Simo, J.S.* A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation / J.S. Simo // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1988. – V. 66. – P. 199–219.

14. *An, Q.* A general theory of finite deformation of viscoplastic thin shells / Q. An, F.G. Kollmann // Acta Mech. – 1996. – V. 117. – P. 47–70.

15. *Miehe, C.* A theory of large-strain isotropic thermoplastisity based on metric transformation tensor / C. Miehe // Arch. Appl. Mech. – 1995. – V. 66. – P. 45–64.

16. *Meyers, A.* Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates / A. Meyers, P. Schievbe, O.T. Bruhns // Acta Mech. – 2000. – V. 139. – P. 91–103.

17. *Xiao, H.* Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate / H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers // Acta Mech. – 1997. – V. 124. – P. 89–105.

18. *Xiao, H.* A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and deformation gradient / H. Xiao, O.T. Bruhns, A. Meyers // Int. J. Plasticity. – 2000. – V. 16. – P. 143–177.

19. *Asghari, M.* Stresses conjugate to the Jaumann rate of Eulerian strain measures / M. Asghari, R. Naghdabadi, S. Sohrabpour // Acta. Mech. – 2007. – V. 190. – P. 45–56.

20. *Lin, R.C.* Numerical study of consistency of rate constitutive equations with elasticity at finite deformation / R.C. Lin // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2002. – V. 55. – P. 1053–1077.

21. *Naghdabadi, R.* Application of corotational rates of the logarithmic strain in constitutive modeling of hardening materials at finite deformations / R. Naghdabadi, M. Yeganeh, A.R. Saidi // Int. J. Plasticity. – 2005 – V. 21. – P. 1546–1567.

22. *Shen, L.-J.* Constitutive relations for isotropic or kinematic hardening at finite elastic-plastic deformations / L.-J. Shen // Int. J. Solids Struct. – 2006. – V. 43. – P. 5613–5627.
23. *Andrade-Campos, A*. Numerical analysis of large deformation processes at elevated temperatures / A. Andrade-Campos, L.F. Menezes, F. Teixeira-Dias // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2006. – V. 195. – P. 3947–3959.
24. *Betsch, P.* Numerical implementation of multiplicative elasto-plasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains / P. Betsch, E. Stein // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1999. – V. 179. – P. 215–245.
25. *Sansour, C.* A model of finite strain viscoplasticity based on unified constitutive equations. Theoretical and computational considerations with applications to shells / C. Sansour, W. Wagner // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2001. – V. 191. – P. 423–450.
26. *Sansour, C.* Viscoplasticity based on additive decomposition of logarithmic strain and unified constitutive equations. Theoretical and computational considerations with reference to shell applications / C. Sansour, W. Wagner // Comput. Struct. – 2003. – V. 81. – P. 1583–1594.
27. *Kojic, M.* An extension of 3-D procedure to large strain analysis of shells / M. Kojic // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2002. – V. 191. – P. 2447–2462.
28. *Basar, Y.* Constitutive model and finite element formulation for large strain elasto-plastic analysis of shell / Y. Basar, M. Itskov // Comput. Mech. – 1999. – V. 23. – P. 466–481.
29. *Basar, Y.* Large inelastic strain analysis by multilayer shell elements / Y. Basar, A. Eckstein // Acta Mech. – 2000. – V. 141. – P. 225–252.
30. *Scheck, B.* A shell finite element for large strain elastoplasticity with anisotropies – Part I: Shell theory and variational principle / B. Scheck, W.M. Smolenski, H. Stumpf // Int. J. Solids Struct. – 1999. – V. 36. – P. 5399–5424.
31. *Scheck, B.* A shell finite element for large strain elastoplasticity with anisotropies – Part II: Constitutive equations and numerical applications / B. Scheck, W.M. Smolenski, H. Stumpf // Int. J. Solids Struct. – 1999. – V. 36. – P. 5425–5451.

[29.09.2008]

KINEMATICS OF FINITE DEFORMATIONS OF 3-D ISOPARAMETRIC SHELL FINITE ELEMENTS

A.I. Golovanov

A methodology for computing the components of basis vectors and kinematic tensors in orthogonal Cartesian coordinates, necessary for the implementation of numerical schemes of nonlinear finite elements analysis of deformable bodies, is presented in the frame of an isoparametric approximation. Tensors characterizing finite deformation and free flow of a medium decomposed on the main and conjugated bases in the original and current configurations, along the basis vectors of the global Cartesian system and along the main directions of the right and left distortion tensors, are described. The tensors are classified into groups, including a group of material (Lagrangian) strain tensors (invariant tensors) and a group of spatial (Eulerian) strain tensors (indifferent tensors). Relations that correlate tensors of different groups are given.

Key words: isoparametric approximation, basis vectors, kinematic tensors, orthogonal Cartesian system of coordinates, main and conjugated bases, free flow of a medium, invariant tensors, indifferent tensors.