

УДК 539.3

О РАВНОВЕСИИ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО ЦИЛИНДРА С СОБСТВЕННЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ*

© 2017 г.

Котов В.Л.¹, Шубчинская Н.Ю.²

¹Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

²Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону,
Российская Федерация

natalieshubchinskaya@gmail.com

Поступила в редакцию 15.12.2016

Рассмотрено равновесное состояние нелинейно-упругого цилиндра с функциональной зависимостью по толщине одного из модулей с полем собственных напряжений. В качестве источников собственных напряжений рассматриваются два вида изолированного дефекта – клиновое дисклинация и винтовая дислокация – на оси цилиндра. С помощью полуобратного представления нелинейной теории упругости исследовано влияние функциональной неоднородности двух видов (линейной и экспоненциальной) одной из упругих констант на напряженно-деформированное состояние свободного от внешних нагрузок цилиндра. Для описания механических свойств материалов при больших деформациях использованы общеупотребительные модели сжимаемых нелинейно-упругих сред – полулинейный (гармонический) материал и материал Блейтца и Ко. Проанализировано изменение длины ненагруженного цилиндра при образовании в нем дефекта. С помощью трехмерных уравнений методом наложения малой деформации на конечную деформацию исследованы проблемы устойчивости неоднородного цилиндра с клиновой дисклинацией при растяжении и сжатии.

Ключевые слова: дисклинация, винтовая дислокация, бифуркационный подход, неоднородные свойства, функционально-градиентные материалы, напряженно-деформированное состояние, устойчивость, сжимаемые материалы.

Введение

Первые работы, посвященные изучению линейных дефектов как источника собственных напряжений, в рамках классической теории упругости принадлежат В. Вольтерра [1]. Более подробный анализ и классификация таких дефектов, описанных на примере цилиндра с разрезом, осуществлен А. Лявом [2]. В статьях [3–5] дано определение поворотных дефектов как дисклинации.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-38-50191-мол_нр).

Изучению задач механики с использованием дислокаций посвящен ряд зарубежных и отечественных работ. В [6] используется модель непрерывно распределенных дисклинаций в сплошном цилиндре для описания зарождения трещины в рамках плоской деформации. Точные аналитические решения задач для дислокаций и дисклинаций в рамках метода виртуальных дефектов приводятся в [7]. Анализ влияния клиновых дисклинаций на напряженно-деформированное состояние (НДС) как пластин и оболочек, так и упругих тел посвящены публикации [8–13]. В статье [14] подробно изучено влияние винтовых дислокаций на устойчивость скручиваемого призматического упругого тела. Результаты обобщения теории упругих дислокаций и дисклинаций на нелинейный случай приведены в монографии [15].

Во всех вышеупомянутых публикациях задачи рассматривались в предположении постоянства упругих модулей. В настоящее время требования современной техники основываются на использовании новых материалов, превосходящих своими механическими свойствами традиционные материалы. К классу указанных материалов относятся функционально-градиентные материалы [16, 17]. Математические модели, разработанные для классических однородных материалов, не охватывают полностью механические и физические свойства таких материалов, так как при наличии значительного градиента нелинейно-упругих свойств наблюдаются качественные различия в поведении неоднородных материалов и изделий из них [18, 19] даже при классических видах нагружения.

В настоящей статье проанализировано влияние неоднородности, заключающейся в функциональной зависимости одной из упругих констант от толщины стенки, на равновесие и устойчивость сжимаемого полого цилиндра. Анализ устойчивости проводился в рамках наложения малой деформации на конечную деформацию [20, 21].

1. Клиновья дисклинация в полом неоднородном нелинейно-упругом цилиндре

Образование клиновья дисклинация в цилиндре описывается полуобратным представлением деформации нелинейной теории упругости вида [22]:

$$R = P(r), \quad \Phi = \kappa\varphi, \quad Z = \gamma z. \quad (1)$$

Здесь $\{R, \Phi, Z\}$, $\{r, \varphi, z\}$ – цилиндрические координаты текущей и отсчетной конфигураций соответственно; $P(r)$ – функция радиального смещения точек цилиндра; κ – параметр дисклинации, зависящий от угла раствора клина; γ – параметр изменения длины цилиндра. Выражения необходимых деформационных характеристик: градиента деформации \mathbf{C} и меры деформации Коши – Грина $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$ – находятся по полуобратному представлению (1).

Определяющее соотношение для сжимаемого упругого материала для тензора напряжений Пиолы:

$$\mathbf{D} = \frac{dW}{d\mathbf{C}}. \quad (2)$$

Для модели полуплинейного материала [23] удельная потенциальная энергия имеет вид:

$$W = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 (\mathbf{U} - \mathbf{E}) + \mu I_1 [(\mathbf{U} - \mathbf{E})^2], \quad (3)$$

где I_k ($k = 1, 2, 3$) – главные инварианты, $\mathbf{U} = (G)^{1/2}$ – левый тензор искажения, λ – материальный параметр, \mathbf{E} – единичный тензор. Удельная потенциальная энергия для модели материала Блейтца и Ко записывается как [23]:

$$W = \frac{1}{2}\mu(1-\beta)\left[I_2I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha}(I_3^\alpha - 1) - 3\right] + \frac{1}{2}\mu\beta\left[I_1 + \frac{1}{\alpha}(I_3^{-\alpha} - 1) - 3\right]. \quad (4)$$

В выражении (4) α, β – материальные параметры, первый из которых в случае малых деформаций связан с коэффициентом Пуассона $\alpha = \nu/(1 - 2\nu)$, а второй является чисто нелинейным.

В обеих моделях (3) и (4) параметр μ , имеющий смысл модуля сдвига при малых деформациях, моделировался как функция r :

– линейная неоднородность

$$\mu(r) = \frac{\mu_1 - \mu_0}{r_1 - r_0}(r - r_0) + \mu_0, \quad (5)$$

– экспоненциальная неоднородность

$$\mu(r) = \mu_0 \exp\left(\frac{r - r_0}{r_0 - r_1} \ln \frac{\mu_0}{\mu_1}\right). \quad (6)$$

Здесь r_0 и r_1 – внутренний и внешний радиусы цилиндра, μ_0 и μ_1 – значения, которые принимает функция на внутренней и внешней боковых поверхностях цилиндра соответственно.

Краевая задача о равновесии цилиндра

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

(\mathbf{n} – вектор единичной нормали к боковой поверхности цилиндра), состоящая из уравнений равновесия и граничных условий, выражающих отсутствие напряжений на боковых поверхностях, в случае моделей (3) и (4) сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $P(r)$ и граничных условий. В терминах тензора напряжений Пиолы она имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dD_{rR}}{dr} + \frac{1}{r}(D_{rR} - \kappa D_{\phi\phi}) = 0, \\ D_{rR}(r_0) = 0, \\ D_{rR}(r_1) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Для исследования влияния параметра дефекта на НДС использовалась схема, описанная в [22, 24], в которой наличие множителя γ в (1) позволяет учесть (в интегральном смысле) возможность осевого сжатия цилиндра либо, при отсутствии такового, определить зависимость изменения длины цилиндра от параметра дисклинации κ . Для анализа удлинения использовалось следующее представление для осевой силы:

$$Q = 2\pi \int_0^{r_1} D_{zz} P(r) P'(r) dr. \quad (9)$$

Результаты численного решения системы (8) и построение зависимости γ от параметра дисклинации κ представлены на рис. 1 и рис. 2.

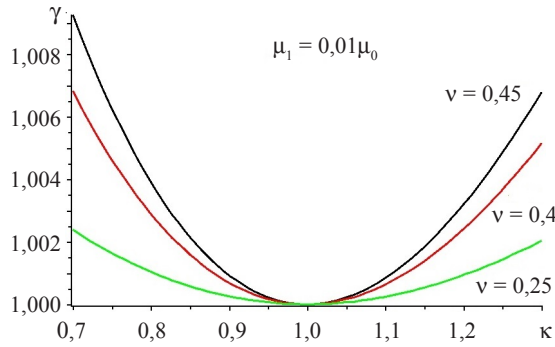


Рис. 1

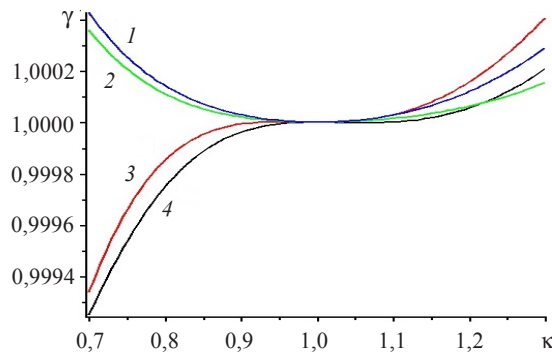


Рис. 2

Рисунок 1 иллюстрирует изменение длины цилиндра из полулинейного материала от параметра дисклинации при разных значениях ν и линейном изменении модуля $\mu(r)$ (5) (толщина стенки $h = (r_1 - r_0)/r_1 = 0,9$). Анализ полученных расчетов показал, что удлинение цилиндра при образовании в нем дефекта будет больше, чем при постоянном значении μ , причем удлинение будет наибольшим при $\mu_1 = 0,01\mu_0$.

На рис. 2 изображено влияние неоднородности на удлинение цилиндров с разной толщиной стенок из полулинейного материала: кривые 1 и 2 соответствуют толщине $h = 0,9$, кривые 3 и 4 – $h = 0,99$, причем для кривых 1 и 3 $\mu_1 = 100\mu_0$, а для кривых 2 и 4 $\mu_1 = 10\mu_0$. Графики показывают, что в случае увеличения параметра μ вдоль радиуса цилиндр удлиняется при любом размере полости и $\kappa > 1$. Но при $\kappa < 1$ цилиндр с толщиной стенки $h = 0,99$ укорачивается, а с толщиной стенки $h = 0,9$ удлиняется.

На рис. 3 и рис. 4 изображены зависимости изменения длины цилиндра с толщиной стенки $h = 0,9$, с линейной неоднородностью (5) при образовании дисклинации для материала Блейтца и Ко при $\alpha = 0,5$ для $\beta = 0$ и $\beta = 1$ соответственно. Для всех значений параметра κ цилиндр только укорачивается или удлиняется, причем наибольшее изменение достигается при монотонно убывающей неоднородности $\mu(r)$.

При всех постоянных коэффициентах была получена аналитическая формула изменения длины цилиндра из материала Блейтца и Ко при образовании в нем дисклинации [24].

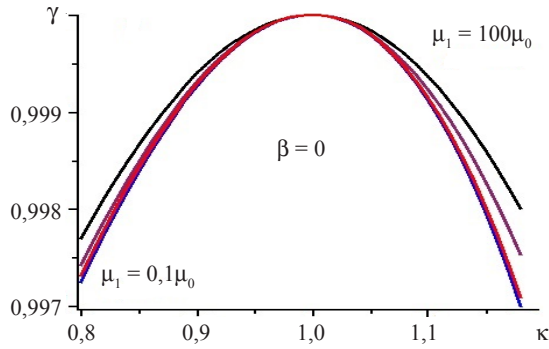


Рис. 3

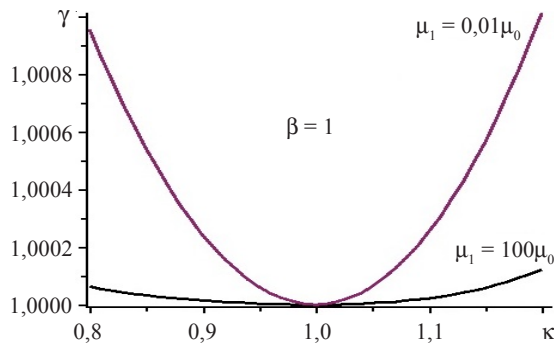


Рис. 4

2. Винтовая дислокация в полном цилиндре

Образование в цилиндре винтовой дислокации с учетом возможности закручивания цилиндра описывается полуобратным представлением вида:

$$R = P(r), \quad \Phi = \varphi + \hat{\psi} z, \quad Z = \gamma z + \hat{a} \varphi. \quad (10)$$

Здесь $\hat{\psi}$ – угол закручивания на единицу длины, $\hat{a} = |\mathbf{b}|/(2\pi)$ – параметр дислокации, \mathbf{b} – вектор Бюргерса.

Краевая задача о равновесии полого цилиндра (7) в терминах компонент тензора напряжений Пиолы по-прежнему состоит из одного уравнения равновесия:

$$\frac{dD_{rR}}{dr} + \frac{1}{r}(D_{rR} - D_{\varphi\Phi}) - \hat{\psi} D_{z\varphi} = 0. \quad (11)$$

Граничные условия имеют вид, как в (8), и означают отсутствие напряжений на боковых поверхностях цилиндра.

Можно изучить влияние исключительно внутренних напряжений, создаваемых винтовой дислокацией, на удлинение и закручивание цилиндра, если потребовать выполнения условия отсутствия (в интегральном смысле) всех внешних воздействий. Это условие состоит в обращении в нуль не только продольной силы Q (9), но и крутящего момента M :

$$M = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} D_{z\Phi} P(r) P'(r) dr. \quad (12)$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} Q = 0, \\ M = 0 \end{cases} \quad (13)$$

характеристики γ и $\psi = \hat{\psi}/r_1$, описывающие соответственно изменение длины и закручивание цилиндра с дислокацией, могут быть найдены как функции материальных параметров α и β модели материала (4), параметра дислокации $a = \hat{a}/r_1$ и толщины стенки цилиндра h .

Численный анализ решения уравнения (7) с учетом (10) при условии отсутствия внешних нагрузок на цилиндр (13) с толщиной стенки $h = 0,9$ для материала Блейтца и Ко при $\beta = 1$ и линейного закона неоднородности (5) приведен на рис. 5. Зависимости вида $\psi = \psi(a)$ и $\gamma = \gamma(a)$ для различных значений параметра α практически совпадают. На рис. 5а изображена зависимость длины цилиндра, а на рис. 5б – зависимость угла закручивания цилиндра от параметра дислокации.

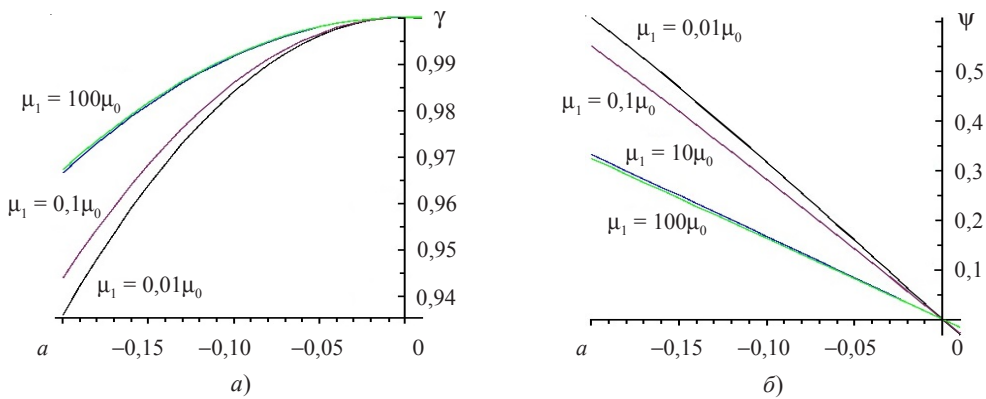


Рис. 5

При исследовании влияния дислокации на свободный от внешних воздействий цилиндр установлено, что при монотонно убывающей зависимости $\mu(r)$ характерное деформирование происходит в большей степени, чем при монотонно возрастающем законе.

На рис. 6 показаны зависимости изменения длины цилиндра от параметра дислокации a при различных коэффициентах ν (рис. 6а), а также для различных величин параметра μ на боковых поверхностях при $\nu = 0,25$ (рис. 6б) для полулинейного материала.

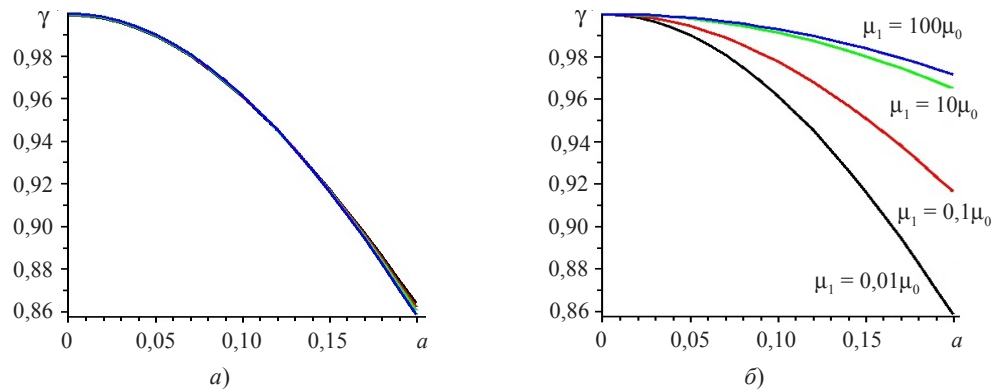


Рис. 6

Цилиндр из полулинейного материала (4) с толщиной стенки $h = 0,9$ с неоднородностью $\mu(r)$ в виде экспоненты (6) может укорачиваться на 14% от своей первоначальной длины (рис. 6а). Установлено, что при монотонно убывающей зависимости $\mu(r)$ для $\nu = 0,25$ характерная деформация $(1 - \gamma)$ наибольшая (рис. 6б).

При всех постоянных коэффициентах была получена аналитическая формула изменения длины цилиндра и угла закручивания из материала Блейтца и Ко при образовании в нем дислокации [24]. Отдельно были получены формулы изменения длины при отсутствии закручивания, то есть при $\psi = 0$ [24].

3. Уравнения нейтрального равновесия

Для изучения устойчивости цилиндра с изолированной дисклинацией модифицируется полуобратное представление (1):

$$\begin{cases} R = P(r) + \varepsilon U(r, \varphi, z), \\ \Phi = \kappa\varphi + \varepsilon V(r, \varphi, z), \\ Z = \gamma z + \varepsilon W(r, \varphi, z). \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $U(r, \varphi, z)$, $V(r, \varphi, z)$, $W(r, \varphi, z)$ – новые неизвестные функции, ε – малый параметр. Градиент деформации, соответствующий преобразованию (14), может быть записан в форме:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \varepsilon \dot{\mathbf{C}}, \quad (15)$$

где \mathbf{C}_0 – градиент деформации, соответствующий основному решению, устойчивость которого исследуется, а тензор $\dot{\mathbf{C}}$ линейно зависит от функций $U(r, \varphi, z)$, $V(r, \varphi, z)$, $W(r, \varphi, z)$. Аналогично линеаризуются остальные геометрические характеристики деформации. Общая форма процесса линеаризации имеет вид

$$\dot{\mathbf{F}} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{F}(\mathbf{C}_0 + \varepsilon \dot{\mathbf{C}}) \right|_{\varepsilon=0}.$$

Уравнения нейтрального равновесия записываются в виде

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = 0, \quad (16)$$

где $\dot{\mathbf{D}}$ – линеаризованный тензор напряжений Пиолы. В компонентах этого тензора система дифференциальных уравнений (16) записывается как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{D}_{rR}}{\partial r} + \frac{\dot{D}_{rR}}{r} + \frac{\partial \dot{D}_{\varphi R}}{r \partial \varphi} - \frac{\kappa \dot{D}_{\varphi \Phi}}{r} + \frac{\partial \dot{D}_{zR}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \dot{D}_{r\Phi}}{\partial r} + \frac{\dot{D}_{r\Phi}}{r} + \frac{\dot{D}_{\varphi R}}{r} + \frac{\partial \dot{D}_{\varphi \Phi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \dot{D}_{z\Phi}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \dot{D}_{rZ}}{\partial r} + \frac{\dot{D}_{rZ}}{r} + \frac{\partial \dot{D}_{\varphi Z}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \dot{D}_{zZ}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Граничные условия означают, что боковые поверхности цилиндра свободны от напряжений, в линеаризованном виде они определяются через компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы:

$$\dot{D}_{rR} \Big|_{r=r_0, r_1} = 0, \quad \dot{D}_{r\Phi} \Big|_{r=r_0, r_1} = 0, \quad \dot{D}_{rZ} \Big|_{r=r_0, r_1} = 0. \quad (18)$$

Линеаризованная краевая задача (17), (18) состоит из трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных относительно неизвестных функций $U(r, \varphi, z)$, $V(r, \varphi, z)$, $W(r, \varphi, z)$ и граничных условий.

Система (17), (18) допускает решения вида:

$$\begin{aligned} U(r, \varphi, z) &= u(r) \cos(n\varphi) \cos(\omega z), \\ V(r, \varphi, z) &= v(r) \sin(n\varphi) \cos(\omega z), \\ W(r, \varphi, z) &= w(r) \cos(n\varphi) \sin(\omega z), \end{aligned} \quad (19)$$

здесь использовались обозначения: $\omega = m\pi/\widehat{l}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $l = \widehat{l}/r_1$ – длина цилиндра. Схема исследования существования нетривиального решения у системы (17), (18) подробно приведена в [20, 21].

4. Численный анализ устойчивости цилиндра с дисклинацией при растяжении и сжатии

Проведение численного анализа существования нетривиальных решений системы (17), (18) показало наличие критических значений деформационной характеристики γ^* в зависимости от параметра дисклинации.

На рис. 7 изображены бифуркационные кривые для сжимаемого неоднородного цилиндра из материала Блейтца и Ко при $\beta = 0,5$, $\alpha = 0,5$, $l = 10$, с линейной неоднородностью $\mu(r)$ (5) и с соотношением $\mu_1 = 10\mu_0$; кривая 1 соответствует толщине стенки цилиндра $h = 0,5$, кривая 2 – толщине $h = 0,9$. Из графиков на рис. 7 видно, что наличие дисклинации оказывает существенное влияние на потерю устойчивости неоднородного цилиндра при сжатии, причем кривые практически симметричны в случае отсутствия дисклинации ($\kappa = 1$).

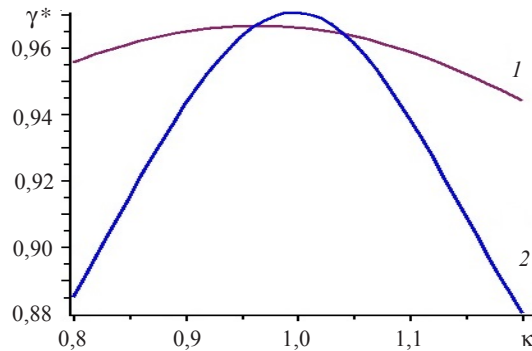


Рис. 7

На рис. 8 изображены бифуркационные кривые для сжимаемого неоднородного цилиндра из упрощенного материала Блейтца и Ко при $\beta = 0$, $\alpha = 0,5$, $h = 0,9$ с линейной неоднородностью $\mu(r)$ (5) с соотношением $\mu_1 = 10\mu_0$; кривая 1 соответствует длине цилиндра $l = 10$, кривая 2 – длине цилиндра $l = 20$.

Значения критического параметра γ^* найдены для мод с номерами $m = 1$, $n = 1$ в соответствии с (19), так как они являются наименьшими среди значений с другими номерами мод.

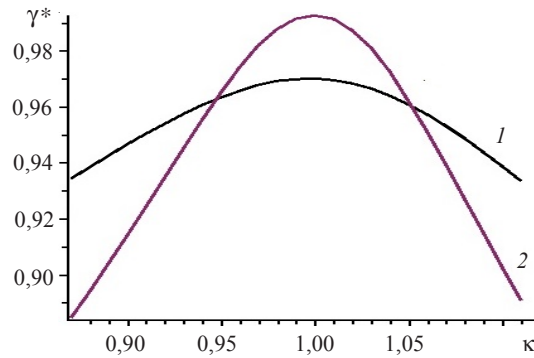


Рис. 8

На рис. 9 изображена бифуркационная кривая для растягиваемого неоднородного цилиндра из упрощенного материала Блейтца и Ко при $\beta = 0$, $\alpha = 0,5$ с экспоненциальной неоднородностью $\mu(r)$ (6) и соотношением $\mu_1 = 10\mu_0$; кривая соответствует длине $l = 10$ и толщине стенки цилиндра $h = 0,9$. Кривая симметрична в случае $\kappa = 1$, причем, в отличие от сжатия цилиндра, при растяжении дисклинация является дестабилизирующим фактором. Значения критического параметра γ^* найдены для мод с номерами $m = 1$, $n = 0$.

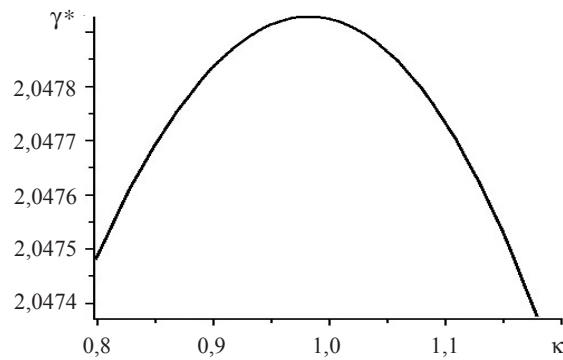


Рис. 9

Заключение

Получены численные решения задачи о равновесии неоднородного нелинейно-упругого полого цилиндра с клиновой дисклинацией в условиях отсутствия осевой силы. Анализ зависимости изменения длины цилиндра при образовании в нем дисклинации показал, что неоднородность в виде монотонно убывающей или возрастающей функции напрямую влияет на характер деформации цилиндра (укорочение или удлинение независимо от знака дисклинации).

В задаче об НДС неоднородного нелинейно-упругого полого цилиндра с винтовой дислокацией в условиях отсутствия осевой силы и крутящего момента было получено, что цилиндр укорачивается при увеличении параметра дислокации.

В рамках бифуркационного подхода, основанного на линеаризации уравнений в окрестности известного решения задачи о равновесии, были получены уравнения нейтрального равновесия для сжимаемого и растягиваемого нелинейно-упругого неоднородного цилиндра с клиновой дисклинацией. Показано, что дополнитель-

ное поле напряжений, вызванное клиновой дисклинацией и рассматриваемой неоднородностью, вносит стабилизацию при сжатии цилиндра, а при растяжении дисклинация является дестабилизирующим фактором.

На основе полученных результатов становится возможным исследование влияния полей дополнительных напряжений и заданной неоднородности на прочность и устойчивость конструкций. Важность полученных результатов обусловлена возрастающей необходимостью использования новых биологических материалов и их заменителей искусственного происхождения.

Список литературы

1. Volterra V. Sur l'equilibre des corps elastiques multiplement connexes. *Annales de l'Ecole Norm. Sup.* 1907. Vol. 24. No 3. P. 401–517.
2. Ляв А. *Математическая теория упругости*. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
3. Frank F.C. On the theory of liquid crystals. *Trans. Faraday SOC.* 1958. 25. P. 19–28.
4. De Wit R. Theory of disclinations: IV. Straight disclinations. *Journal of Research of the National Bureau of Standards-A. Physics and Chemistry*. 1973. Vol. 77A. No 5. P. 607–658.
5. Clayton J.D., McDowell D.L., Bammann D.J. Modeling dislocations and disclinations with finite micropolar elastoplasticity. *International Journal of Plasticity*. 2006. Vol. 22. P. 210–256.
6. Luo J., Xiao Z.M., Zhou K. Stress analysis on a Zener crack nucleation from an eccentric wedge disclination in a cylinder. *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. P. 811–820.
7. Колесникова А.Л., Романов А.Е. Петлевые дислокации и дисклинации в методе виртуальных дефектов. *Физика твердого тела*. 2003. Т. 45. №9. С. 1626–1636.
8. Владимиров В.И., Колесникова А.Л., Романов А.Е. Клиновые дисклинации в упругой пластине. *Физика металлов и металловедение*. 1985. Т. 60. №6. С. 1106–1115.
9. Карякин М.И. Равновесие и устойчивость нелинейно-упругой пластинки с клиновой дисклинацией. *ПМТФ*. 1992. №3. С. 157–163.
10. Zubov L.M. The linear theory of dislocations and disclinations in elastic shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2010. Vol. 74. P. 663–672.
11. Zubov L.M., Stolpovskii A.V. A theory of dislocations and disclinations in elastic plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008. Vol. 72. P. 724–737.
12. Lee X., Baldo M., Duan Y. Torsion structure in Riemann–Cartan manifold and dislocation. *Gen. Relativ. Gravit.* 2002. Vol. 34 (10). P. 1569–1577.
13. Zhang P., Duan Y., Zhang H. Knotlike χ disclinations in the cholesteric liquid crystals. *Physica A 370*. 2006. P. 245–250.
14. Зубов Л.М., Губа А.В. Нелинейная теория кручения призматических упругих тел, содержащих винтовые дислокации. *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естество. науки. Спецвыпуск «Нелинейные проблемы механики сплошных сред»*. 2003. С. 212–222.
15. Zubov L. M. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*. Berlin–Heidelberg–New-York: Springer-Verlag, 1997. 205 p.
16. Hui-Shen Shen. *Functionally Graded Materials – Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. 2009. Taylor & Francis Group. 276 p.
17. Derras M., Draiche K.A.K., Tounsi A. Non-linear analysis of functionally graded plates in cylindrical bending based on a new refined shear deformation theory. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2013. Vol. 51. No 2. P. 339–348.
18. Makwana A.B., Panchal K.C., Gandhi A.H. Stress analysis of functionally graded plate with cut-out. *International Journal of Advanced Mechanical Engineering*. 2014. Vol. 4. No 5. P. 495–500.
19. Dryden J., Jayaraman K. Effect inhomogeneity on the stress in pipes. *Journal of Elasticity*. 2006. Vol. 83. P. 179–189.
20. Karyakin M., Kalashnikov V., Shubchinskaya N. Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 80. P. 90–105.

21. Карякин М.И., Шубчинская Н.Ю. Об устойчивости нелинейно-упругого цилиндра с собственными напряжениями при растяжении и сжатии. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2016. № 2(190). С. 54–60.
22. Зубов Л.М. Изолированная дисклинация в нелинейно-упругом сжимаемом теле. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1986. №1. С. 69–73.
23. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.
24. Карякин М.И., Поздняков И.В., Пустовалова О.Г., Шубчинская Н.Ю. О деформированном состоянии нелинейно-упругого цилиндра с внутренними напряжениями. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2013. №6. С. 46–51.

References

1. Volterra V. Sur l'équilibre des corps elastiques multiplement connexes. *Annales de l'Ecole Norm. Sup.* 1907. Vol. 24. No 3. P. 401–517.
2. Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge: University Press. 1927. 643 p.
3. Frank F. C. On the theory of liquid crystals. *Trans. Faraday SOC.* 1958. 25. P. 19–28.
4. De Wit R. Theory of Disclinations: IV. Straight Disclinations. *Journal of Research of the National Bureau of Standards-A. Physics and Chemistry*. 1973. Vol. 77A. No 5. P. 607–658.
5. Clayton J.D., McDowell D.L., Bammann D.J. Modeling dislocations and disclinations with finite micropolar elastoplasticity. *International Journal of Plasticity*. 2006. Vol. 22. P. 210–256.
6. Luo J., Xiao Z.M., Zhou K. Stress analysis on a Zener crack nucleation from an eccentric wedge disclination in a cylinder. *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. P. 811–820.
7. Kolesnikova A.L., Romanov A.E. Petlevye dislokatsii i disklinatsii v metode virtual'nykh defektov [Dislocation and disclination loops in the virtual-defect method]. *Fizika tverdogo tela [Physics of the Solid State]*. 2003. Vol. 45. No 9. P. 1706–1718 (In Russian).
8. Vladimirov V.I., Kolesnikova A.L., Romanov A.E. Klinovye disklinatsii v uprugoy plastine [Wedge disclinations in elastic plate]. *Fizika metallov i metallovedenie [The Physics of Metals and Metallography]*. 1985. Vol. 60. No 6. P. 1106–1115 (In Russian).
9. Karyakin M.I. Ravnovesie i ustoychivost' nelineynoy uprugoy plastinki s klinovoy disklinatsiey [Equilibrium and stability of nonlinear elastic plate with a wedge disclination]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 1992. No 3. P. 157–163 (In Russian).
10. Zubov L.M. The linear theory of dislocations and disclinations in elastic shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2010. Vol. 74. P. 663–672.
11. Zubov L.M., Stolpovskii A.V. A theory of dislocations and disclinations in elastic plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008. Vol. 72. P. 724–737.
12. Lee X., Baldo M. and Duan Y. Torsion structure in Riemann – Cartan manifold and dislocation. *Gen. Relativ. Gravit.* 2002. Vol. 34 (10). P. 1569–1577.
13. Zhang P., Duan Y., Zhang H. Knotlike χ disclinations in the cholesteric liquid crystals. *Physica A 370*. 2006. P. 245–250.
14. Zubov L. M., Guba A.V. Nelineynaya teoriya krucheniya prizmaticheskikh uprugikh tel, sodержashchikh vintovye dislokatsii [Nonlinear theory of torsion of prismatic elastic bodies containing screw dislocations]. *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki. Spetsvyypusk "Nelineynye problemy mekhaniki sploshnykh sred"*. [Scientific-education and Applied Journal. University news. North-Caucasian region. Natural sciences series]. 2003. P. 212–222 (In Russian).
15. Zubov L.M. *Nonlinear theory of dislocations and disclinations in elastic bodies*. Berlin, Heidelberg, New-York. Springer-Verlag. 1997. 205 p.
16. Hui-Shen Shen. *Functionally Graded Materials – Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. 2009. Taylor & Francis Group. 276 p.
17. Derras M., Draiche K. A. K., Tounsi A. Non-linear analysis of functionally graded plates in cylindrical bending based on a new refined shear deformation theory. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2013. Vol. 51. No 2. P. 339–348.
18. Makwana A. B., Panchal K.C., Gandhi A. H. Stress analysis of functionally graded plate

with cut-out. *International Journal of Advanced mechanical Engineering*. 2014. Vol. 4. No 5. P. 495–500.

19. Dryden J., Jayaraman K. Effect inhomogeneity on the stress in pipes. *Journal of Elasticity*. 2006. Vol. 83. P. 179–189.

20. Karyakin M., Kalashnikov V., Shubchinskaya N. Nonlinear effects in a plane problem of the pure bending of an elastic rectangular panel. *International Journal of Engineering Science*. 2014. Vol. 80. P. 90–105.

21. Karyakin M., Shubchinskaya N. Ob ustoychivosti nelineynno-uprugogo tsilindra s sobstvennymi napryazheniyami pri rastyazhenii i szhatii [On stability of nonlinearly elastic cylinder with internal stresses under tension and compression]. *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki [Scientific-education and Applied Journal. University news. North-Caucasian region. Natural sciences series]*. 2016. No 2(190). P. 54–60 (In Russian).

22. Zubov L.M. Izolirovannaya disklinatsiya v nelineynno-uprugom szhimaemom tele [Isolated disclination in nonlinear elastic compressible body]. *Izv. AN SSSR. MTT [Mechanics of Solids]* 1986. No 1. P. 69–73 (In Russian).

23. Lur'ye A.I. *Nelineynaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]*. Moscow. Nauka Publ. 1980. 512 p. (In Russian).

24. Karyakin M.I., Pozdnyakov I.V., Pustovalova O.G., Shubchinskaya N.Y. O deformatsionnom sostoyanii nelineynno-uprugogo tsilindra s vnutrennimi napryazheniyami [On deformed state of nonlinearly elastic cylinder with internal stresses]. *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki [Scientific-education and Applied Journal. University news. North-Caucasian region. Natural sciences series]*. 2013. No 6. P. 46–51 (In Russian).

ON THE EQUILIBRIUM AND STABILITY OF NONLINEARLY ELASTIC FUNCTIONALLY GRADED CYLINDER WITH INTERNAL STRESSES

Kotov V.L.¹, Shubchinskaya N.Yu.²

¹*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

²*Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

There was an investigation of stress-strain state of nonlinearly elastic cylinder, which has additional internal stresses, with functional dependence on thickness of cylinder one of the elastic module. The causes of additional stresses are two type of isolated defects - wedge disclination and screw dislocation. By using the semi-inverse representation of nonlinear elasticity theory, the analysis of influence of two types of functional inhomogeneity (linear and exponential) of the elastic module to the stress-strain state of free load cylinder was introduced. Commonly used models of compressible nonlinearly elastic media: semi-linear model (John material) and Blatz and Ko material describe the mechanical properties of a cylinder under large deformations. The changing in length of unloaded cylinder was analyzed due to defect formation. By using method of imposing a small deformation to finite one based on three-dimensional equations there were studied stability problems inhomogeneous cylinder with wedge disclination under compression and tension.

Keywords: wedge disclination, screw dislocation, bifurcation approach, inhomogeneous properties, functionally graded materials, stress-strain state, stability, compressible materials.