

УДК 532.596

**ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ЖИДКОСТИ
ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ТРУБОПРОВОДА^{*)}****А.В. Яскеляин***Нижний Новгород*

Рассматривается задача о моделировании гидравлического удара в движущемся пространственном трубопроводе. Исследование вызванного колебаниями трубопровода нестационарного течения жидкости сведено к решению смешанной задачи с нестационарными граничными условиями. Для этого разработан численный алгоритм, в котором реализованы метод характеристик и конечно-разностная схема первого порядка. Приведены результаты сравнения тестовых расчетов с аналитическим решением и результатами исследования гидродинамических процессов в пространственном трубопроводе при задании сейсмической нагрузки, соответствующей типичному землетрясению.

Необходимой частью расчетов на прочность и надежность трубопроводных систем является расчет динамических нагрузок при гидравлическом ударе. Для анализа таких систем необходимо решение общей задачи о гидроупругих колебаниях трубопроводов с жидкостью, что требует значительных вычислительных и временных затрат. На практике расчет гидравлического удара проводится путем решения независимой гидродинамической задачи, а полученные при этом данные используются для решения задачи о колебаниях трубопроводов. В таких расчетах, как правило, используется математическая модель одномерного неустановившегося адиабатического течения однофазной сжимаемой среды в неподвижном трубопроводе [1, 2]. Однако при анализе явления гидравлического удара в трубопроводах сложной пространственной формы эта модель приводит к заметным качественным и количественным погрешностям, так как в ней не учитывается существенное для данного класса задач влияние колебаний труб на движение внутреннего потока среды [3–6]. Влияние движения трубопровода на гидродинамические процессы существенно также при внешних нагрузках "сейсмического" типа [6]. Учет этого влияния при проектировании трубопроводов необходим для обеспечения прочности и надежности при их эксплуатации.

В настоящей статье рассматривается задача о расчете гидравлического удара в движущемся по заданному закону пространственном трубопроводе.

1. Уравнения движения

Рассмотрим трубопровод, ось которого задана радиус-вектором $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0(s)$, где s – отсчитываемая вдоль оси трубопровода пространственная координата (длина дуги). Единичный вектор касательной $\boldsymbol{\tau}_0$ к оси связан с радиус-вектором \mathbf{R}_0

^{*)} Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-3367.2008.8).

соотношением $\boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\tau}_0(s) = d\mathbf{R}_0/ds$. Труба образована замкнутой осесимметричной оболочкой (рис. 1), имеющей внутренний радиус r . Перемещения оси трубы удобно описывать вектором линейных перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(s,t)$, тогда результирующее положение оси $\mathbf{R} = \mathbf{R}(s,t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{u}$. Направление, касательное к движущейся оси трубопровода, определяется единичным вектором $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + d\mathbf{u}/ds$, $(\boldsymbol{\tau}_0 \cdot d\mathbf{u}/ds) = 0$, то есть ось считается нерастяжимой.

В предположении, что поток жидкости полностью характеризуется средними по сечению величинами – давлением p , относительной скоростью v , плотностью ρ , его математическая модель включает в себя три уравнения: неразрывности, движения и состояния среды. Для получения этих уравнений рассмотрим элемент жидкости длиной ds , образованный двумя сечениями, нормальными к оси трубопровода (рис. 2).

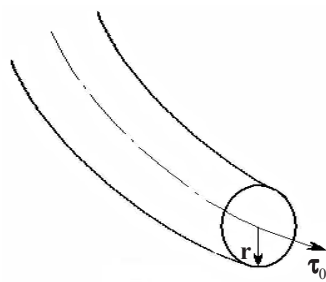


Рис. 1

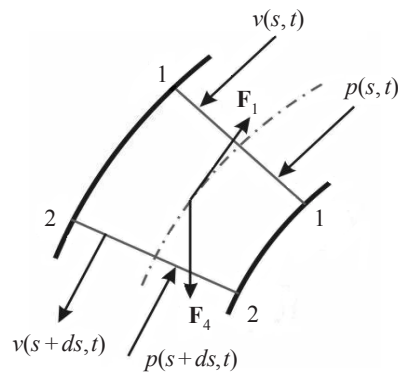


Рис. 2

Первое уравнение получим из условия неразрывности потока:

$$dm_1 + dm_2 = -\frac{\partial(\rho w ds)}{\partial t} dt, \quad (1)$$

где $dm_1 = \rho(s,t) w_1 v(s,t) dt$ – масса жидкости, прошедшая через сечение "1-1" за время dt ; $dm_2 = \rho(s+ds,t) w_2 v(s+ds,t) dt$ – масса жидкости, прошедшая через сечение "2-2" за время dt ; $\partial(\rho w ds)/\partial t \cdot dt$ – приращение массы в рассматриваемом элементе; $v = ds/dt$ – относительная скорость движения элемента, w – площадь проходного сечения трубопровода. После подстановки выражений для dm_1 и dm_2 в уравнение (1) его можно преобразовать к известному виду:

$$\frac{\partial(\rho w v)}{\partial s} + \frac{\partial \rho w}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Считая, что относительная скорость течения среды мала, то есть $v/c \ll 1$, и уравнение состояния жидкости можно записать как $dp/d\rho = c^2$, где c – скорость звука в жидкости, приведем уравнение неразрывности (2) к виду:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c^2 \frac{\partial v}{\partial s} = 0, \quad (3)$$

где $P = \int_{p_0}^p dp/\rho$ – "функция давления" жидкости [7].

Для вывода второго уравнения запишем для выделенного элемента (см. рис. 2) закон изменения импульса:

$$d(\mathbf{v}\rho w ds) = dm_1 \mathbf{v}(s,t) - dm_2 \mathbf{v}(s+ds,t) + \sum \mathbf{F}_i dt.$$

Здесь $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau} + \partial \mathbf{u} / \partial t$ – абсолютная скорость движения частицы, \mathbf{F}_i – силы, действующие на элемент 1-1-2-2:

$\mathbf{F}_1 = -\rho g w i ds \boldsymbol{\tau}$ – поверхностная сила трения, обусловленная действием на жидкость касательных напряжений на границе с трубной оболочкой, $i = i(v)$ – гидравлический уклон (определяется потерями напора на единицу длины), g – ускорение свободного падения [1];

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\partial(pw\boldsymbol{\tau})}{\partial s} ds \quad \text{– сила гидродинамического давления;}$$

$$\mathbf{F}_3 = p \frac{\partial w}{\partial s} ds \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{– сила реакции стенок оболочки;}$$

$$\mathbf{F}_4 = \rho w ds \mathbf{g} \quad \text{– сила тяжести.}$$

Подставим в данное уравнение выражения для dm_1 , dm_2 , сил \mathbf{F}_i и спроецируем его вектор на $\boldsymbol{\tau}$. После преобразования получим:

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = -gi + (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \left(2v \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{\tau}. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) описывают неустановившееся напорное адиабатическое течение вязкой сжимаемой жидкости в протяженном подвижном трубопроводе. Эти уравнения отличаются от обычно используемых при исследовании гидравлического удара в трубах наличием в правой части уравнения (4) третьего слагаемого, которое учитывает перемещение оси трубопровода.

Начальное распределение по пространственной координате переменных P и v будем считать известным:

$$P(0,s) = P_0(s), \quad v(0,s) = v_0(s), \quad (5)$$

где $P_0(s)$ и $v_0(s)$ – заданные непрерывные функции.

Граничные условия на концах трубопровода соответствуют заданным давлениям или скоростям:

$$\begin{aligned} P(t,0) = P_1(t) \quad \text{или} \quad v(t,0) = v_1(t), \\ P(t,L) = P_2(t) \quad \text{или} \quad v(t,L) = v_2(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где $P_1(t)$, $P_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ – заданные функции времени.

Таким образом, задача исследования неустановившегося течения жидкости в движущемся трубопроводе сводится к решению смешанной задачи (3)–(6).

2. Численный метод решения задачи

Для решения задачи (3)–(6) используем метод характеристик. Введем вектор переменных $\mathbf{X} = (P, v)^T$ и представим систему уравнений (3), (4) в матричном виде:

$$\mathbf{X}_t + \hat{\mathbf{E}} \mathbf{X}_s = \mathbf{F}. \quad (7)$$

Здесь $\hat{\mathbf{E}}$ – матрица коэффициентов, \mathbf{F} – вектор-столбец правых частей системы уравнений:

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gi + (\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}) - \left(2v \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix}$$

Следуя методу характеристик, систему уравнений типа (7) приведем к характеристической форме [8]:

$$\boldsymbol{\Omega}_m (d\mathbf{X} / dt)_m = \boldsymbol{\Omega}_m \mathbf{F}_m, \quad m = 1, 2, \quad (8)$$

где m – номер характеристического направления в плоскости (s, t) , $\boldsymbol{\Omega}_m$ – собственные векторы матрицы $\hat{\mathbf{E}}^T$. Наклон характеристических кривых определяется собственными числами λ_m матрицы $\hat{\mathbf{E}}^T$:

$$(d\mathbf{X} / dt)_m = \lambda_m, \quad m = 1, 2.$$

Для системы уравнений (7) имеем: $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = -c$, $\boldsymbol{\Omega}_1 = (1, c)^T$, $\boldsymbol{\Omega}_2 = (1, -c)^T$.

Система уравнений (8) может быть проинтегрирована с использованием численных схем, позволяющих по известным значениям вектора переменных на временном слое $t = t_0$ находить решение на слое $t = t_0 + \Delta t$, где Δt – шаг интегрирования. Одной из таких схем является явно-неявная конечно-разностная схема:

$$\boldsymbol{\Omega}_m (\mathbf{X}_M - \mathbf{X}_m) = \Delta t v \boldsymbol{\Omega}_m \mathbf{F}_m + \Delta t (1 - \beta) \boldsymbol{\Omega}_m \mathbf{F}_M, \quad m = 1, 2, \quad (9)$$

где \mathbf{X}_M , \mathbf{F}_M – значения вектора переменных и правых частей в точке M пересечения характеристик на слое $t = t_0 + \Delta t$; \mathbf{X}_m , \mathbf{F}_m – значения векторов переменных и правых частей в точках пересечения характеристических направлений со слоем $t = t_0$ (рис. 3), β – параметр, $0 \leq \beta \leq 1$.

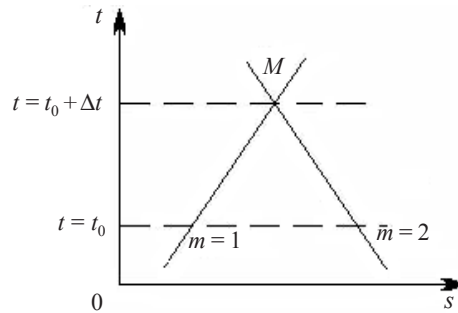


Рис. 3

Уравнения (9) позволяют найти решение в любой внутренней точке s трубопровода ($0 \leq s \leq L$). В граничных точках $s = 0$ и $s = L$ одно из уравнений системы (9), соответствующее характеристическому направлению, выходящему за границу трубопровода, заменяется условиями (6).

При численной реализации метода характеристик будем исходить из того, что относительная скорость течения среды мала, то есть $v/c \ll 1$, поэтому на плоскости (s, t) можно построить прямоугольную сетку с шагом по времени Δt и по пространственной координате $\Delta s = c\Delta t$. В момент времени $t = t_0$ значения переменных P , v в узлах сетки определяются из начальных условий (5). На следующем слое $t = t_0 + \Delta t$

решение находится с использованием характеристических соотношений (9) и граничных условий (6). Затем процедура повторяется для слоя $t=t_0+2\Delta t$ и т.д. с шагом Δt . Размер шага определяется на основании анализа конкретных физических процессов.

3. Сравнение с аналитическим решением

Для тестирования разработанного алгоритма был выполнен расчет гидродинамических процессов для части трубопровода, имеющей форму термокомпенсатора (рис. 4). Трубопровод расположен в горизонтальной плоскости XOY и может перемещаться в направлении оси OY без деформации оси.

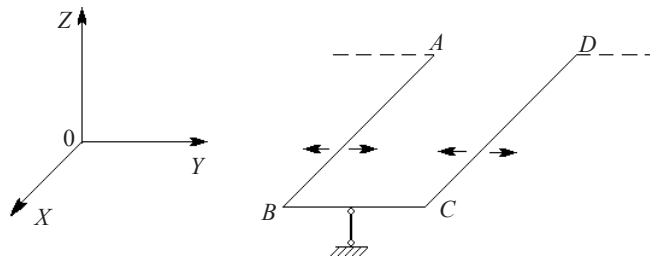


Рис. 4

Рассматривались гармонические колебания трубопровода в направлении оси OY , когда все его точки движутся по закону: $y = y_0 \cos \omega t$, где y_0 – амплитуда колебаний, ω – циклическая частота. Для такого вида движения можно получить аналитическое решение.

Представим трубопровод совокупностью участков AB , BC , CD и запишем уравнения движения жидкости в нем. Сопроводив величины, относящиеся к участкам, индексом k номера участка ($k = 1, 2, 3$ для участков AB , BC , CD соответственно), с учетом введенных ранее обозначений получим:

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} + c^2 \frac{\partial v_k}{\partial s_k} = 0,$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k}{\partial t} + h_k v_k = f_k(t), \quad (11)$$

$$0 < s_k < L_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где $f_1 = f_3 = 0$; $f_2 = -\omega^2 y_0 e^{i\omega t}$. При выводе этих уравнений предполагалось, что гидравлический уклон линейно зависит от скорости движения среды, то есть $i = h_k v_k / g$, h_k – коэффициент пропорциональности, что, к примеру, имеет место при ламинарном течении жидкости, когда $Re < 2300$ (Re – число Рейнольдса). Предполагалось также, что в граничных сечениях A и D давления фиксированы, а в сечениях B , C действуют условия неразрывности потока:

$$P_1(0, t) = P_3(L_3, t) = 0; \quad P_1(L_1, t) = P_2(0, t); \quad P_2(L_2, t) = P_3(0, t);$$

$$v_1(L_1, t) = v_2(0, t); \quad v_2(L_2, t) = v_3(0, t). \quad (12)$$

Система уравнений (11) с граничными условиями (12) представляет собой одно-

родную краевую задачу, решение которой, описывающее вынужденные колебания жидкости, находится аналитически.

Приведем результаты сравнения численного и аналитического решений. На рис. 5, 6 построены графики изменения напора $H=H(s,t)$, где $H=P/g$, в трубопроводе $ABCD$ при его гармонических колебаниях в горизонтальной плоскости с частотой f и с начальными и граничными условиями, соответствующими условиям аналитической задачи. Численные значения параметров задачи приняты следующими: $f = 10$ Гц, $L_1 = L_3 = 8$ м, $L_2 = 5$ м, $d_1 = d_2 = d_3 = 0,25$ м (d_1, d_2, d_3 – диаметры участков трубопровода), $c_1 = c_2 = c_3 = 1300$ м/с. Точка сравнения находится на участке BC с координатой $s_2 = 2$ м. Пунктирная линия на графиках соответствует численному решению, сплошная линия – аналитическому решению.

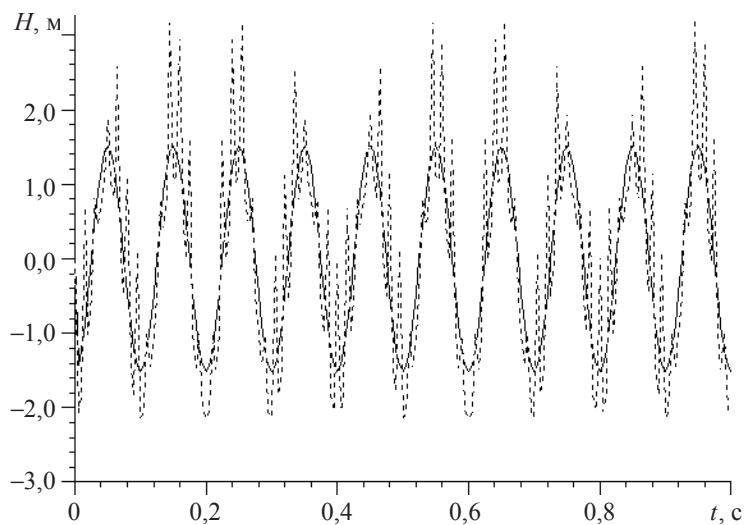


Рис. 5

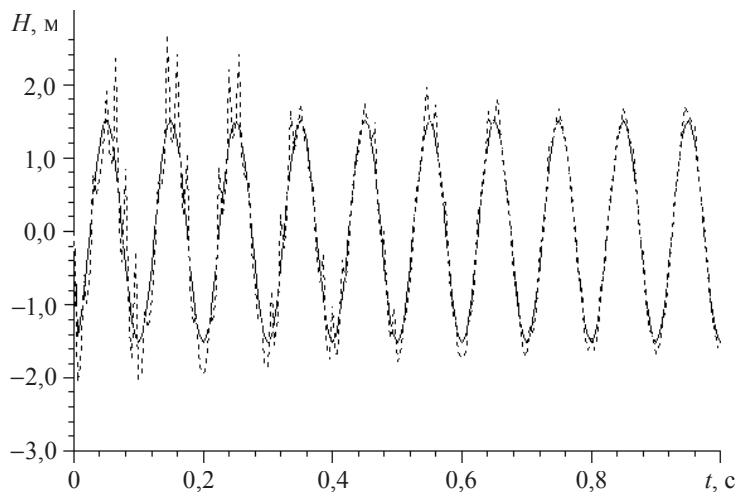


Рис. 6

На графиках численного решения можно различить два типа колебаний: с частотой $f = 10$ Гц, что соответствует частоте внешнего воздействия, и с частотой

$f \approx 62$ Гц. Колебания с частотой $f = 10$ Гц хорошо совпадают с аналитическим решением по частоте и амплитуде. Колебания с частотой 62 Гц, которые на графике аналитического решения отсутствуют, затухают с увеличением трения. Они возникают при подаче на трубопровод в начальный момент времени $t = 0$ внешнего возмущения в виде $y = y_0 \cos \omega t$. Подтверждением этому могут служить результаты расчета с увеличенным в 10^3 раз по сравнению с исходным значением коэффициентом гидравлических потерь трубопровода (см. рис. 6).

Таким образом, в результате проведенного исследования установлено хорошее совпадение численного и аналитического решений для гармонических колебаний, что подтверждает правильность разработанного алгоритма.

4. Примеры расчетов

В качестве примеров практического применения разработанного алгоритма были выполнены расчеты гидродинамических процессов в U-образном трубопроводе (рис. 7) при его движении в горизонтальном направлении, совпадающем с направлением оси OX . Рассматривались два типа движения:

гармонические колебания $x = x_0 \sin 2\pi f t$;

сейсмические колебания

$$\ddot{x} = \begin{cases} \ddot{x}_1 = g \sin[2\pi(0,45t^{1,95} + 1,55)t], & 0 \leq t < 2,2 \text{ с}, \\ \ddot{x}_1 = \exp(-7,67(t - 2,2)), & 2,2 \leq t < 2,5 \text{ с}, \end{cases}$$

\ddot{x} – аналитическая аппроксимация синтезированной сейсмограммы типичного землетрясения (по данным НПО ЦКТИ им. Н.И. Ползунова). В исходном положении возмущения в жидкости отсутствовали, давление на концах трубопровода оставалось постоянным в течение всего процесса.

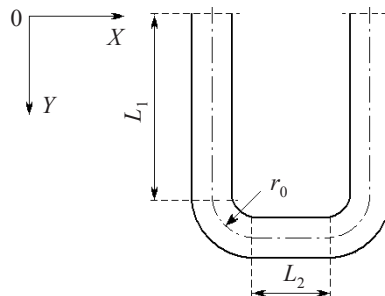


Рис. 7

Результаты расчетов представлены на рис. 8, 9 в виде графиков изменения напора $H = P/g$ в зависимости от времени. Численные значения параметров, использованные при расчете, были взяты следующими: $L_1 = 8$ м, $L_2 = 5$ м, $r_0 = 1$ м, $d = 0,25$ м, $c = 1300$ м/с, $s_1 = 8$ м (s_1 – координата точки для построения графика). Рисунок 8 иллюстрирует случай возбуждения колебаний в жидкости при гармонических колебаниях трубопровода. Биения, наблюдаемые на этом рисунке, объясняются тем, что частота вынужденных колебаний $f = 29$ Гц близка к первой собственной частоте колебаний столба жидкости в трубопроводе ($f_1 \approx 30$ Гц). На рис. 9 представлены графики изменения напора и ускорения $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$ при сейсмическом возбуждении трубопровода.

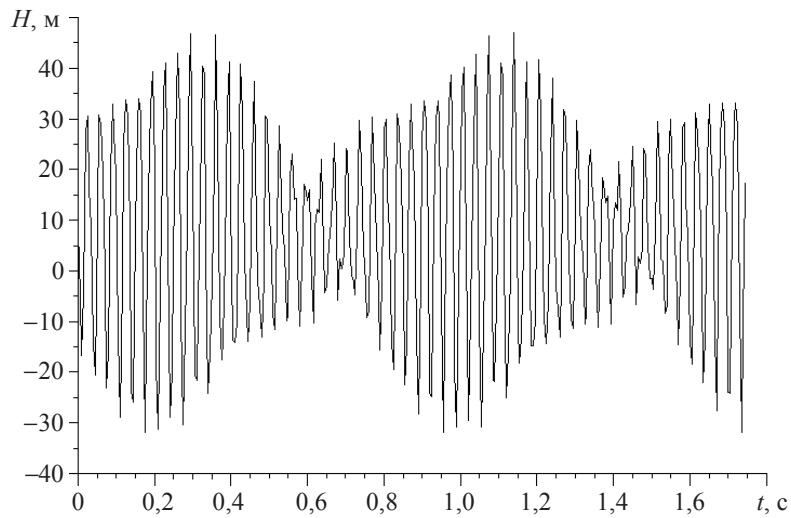


Рис. 8

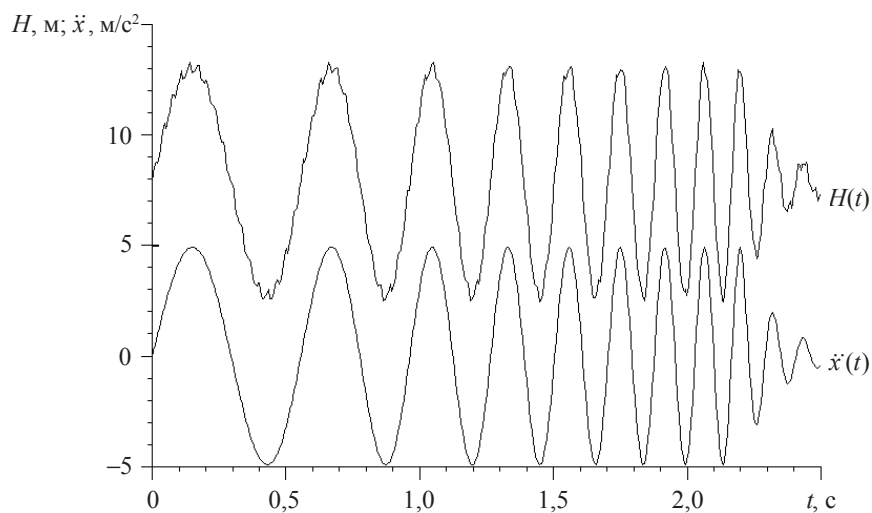


Рис. 9

Заключение

Разработаны математическая модель и численный алгоритм, предназначенные для исследования нестационарных гидродинамических процессов в движущемся по заданному закону пространственном трубопроводе. Алгоритм прошел тестирование, в результате которого установлено хорошее совпадение численного и аналитического решений. Алгоритм может применяться для расчета гидроупругих колебаний трубопроводов, вызванных внешними нагрузками, закон изменения которых во времени известен.

Ключевые слова: моделирование, гидравлический удар, пространственный трубопровод, смешанная задача, нестационарные граничные условия, сейсмическая нагрузка.

Литература

1. *Аронович, Г.В.* Гидравлический удар и уравнивающие резервуары / Г.В. Аронович, Н.А. Картвелишвили, Я.К. Любимцев. – М.: Наука, 1968. – 248 с.
2. *Чарный, И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах / И.А. Чарный. – М.: ГИТТЛ, 1951. – 223 с.
3. *Величко.* Гидроупругое взаимодействие при гидравлическом ударе в системе гибких трубопроводов / Величко, Карабин, Лин // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1986. – № 3. – С. 84–111.
4. *Wiggert, D.C.* Coupled Transient and Structural Motion in Liquid-Filled Piping Systems / D.C. Wiggert, F.J. Hatfield, M.W. Lesmez // Proc. 5-th Int. Conf. on Pres. Surg. – Hannover, 1986. – P. 1–9.
5. *Уиггерт.* Анализ гидравлических и упругих переходных процессов в трубопроводах методом характеристик / Уиггерт, Хатфилд, Штукенбрук // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1988. – № 1. – С. 260–267.
6. *Хатфилд.* Волны давления в трубопроводах с жидкостью, возникающие в результате сейсмических воздействий / Хатфилд, Уиггерт // Современное машиностроение. Сер. В. – 1991. – № 1. – С. 24–29.
7. *Лойцянский, Л.Г.* Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. – 904 с.
8. *Магомедов, К.М.* О построении разностных схем уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений / К.М. Магомедов, А.С. Холодов // ЖВМиМФ. – 1969. – Т.9, №2. – С. 373–386.

[08.09.2008]

STUDYING A HYDRAULIC SHOCK IN A LIQUID FLOWING IN A VIBRATING PIPELINE

A.V. Yaskelyain

A problem of modeling a hydraulic shock in a moving spatial pipeline is studied. The analysis of a non-stationary liquid flow resulting from the vibration of the pipeline is reduced to solving a mixed problem with non-stationary boundary conditions. To analyze the problem, a numerical algorithm is developed, where the method of characteristics and a first-order finite-difference scheme are implemented. The results of comparing the test calculations with an analytical solution and the results of the analyzing hydro-dynamic processes in a spatial pipeline for a preset seismic load corresponding to a typical earthquake are presented.

Key words: modeling, hydraulic shock, spatial pipeline, mixed problem, nonstationary boundary conditions, seismic load.