

УДК 534.2

**К ВОПРОСУ ОБ ИМПУЛЬСЕ УПРУГИХ ВОЛН
И ИХ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ПРЕПЯТСТВИЕ^{*)}****Г.Г. Денисов, В.В. Новиков, М.Л. Смирнова***Нижний Новгород*

На простых примерах показано, что для вычисления импульса волн и сил, возникающих при взаимодействии волн с отражающим препятствием, требуется учет нелинейных факторов в уравнениях движения упругих систем и в крайних условиях. Демонстрируется несостоятельность основанного на понятиях "волнового импульса" и "волнового давления" упрощенного подхода к этим задачам.

1. Интерес к воздействию волн на отражающее их препятствие возник очень давно и связан с предположением о том, что волны любой физической природы при взаимодействии с какой-либо преградой оказывают на нее не равное нулю среднее давление, подобно давлению электромагнитных волн на отражающую их поверхность. Существуют различные мнения о том, каков механизм воздействия волн на границу среды. Для разрешения этого вопроса часто используют понятие "волнового импульса" [1–3]. Именно изменением этой величины при взаимодействии волны с препятствием и объясняется ее воздействие на границу, которое также называют "волновым давлением".

Пусть одномерная упругая система характеризуется функционалом Лагранжа

$$L = \int_a^b \lambda dx,$$

где $\lambda = \lambda(x, t, u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t))$ – плотность функции Лагранжа, а $u(x, t)$ – смещение точек системы. Плотность "волнового импульса" определяется следующим образом:

$$p^W(x, t) = -u_x \frac{\partial \lambda}{\partial u_x}, \quad (1)$$

и устанавливается дифференциальный закон изменения p^W и T^W , имеющий в отсутствие внешних сил вид

$$\frac{\partial p^W}{\partial t} + \frac{\partial T^W}{\partial x} = \lambda_x,$$

где $T^W = \lambda - u_x \partial \lambda / \partial u_x$ – так называемая сила "волнового давления" в произвольном сечении x упругой системы.

^{*)} Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00368).

По-видимому, в [4] впервые были введены рассматриваемые "волновые" характеристики. При этом подчеркивалось, что величину, определяемую соотношением (1), не надо смешивать с величиной $\partial\lambda/\partial u_t$, действительной плотностью количества движения среды. "Она является новой, дифференциальной величиной", которую предлагается называть "плотностью волнового количества движения (плотностью "волнового импульса"), так как она отлична от нуля только для волнового движения, при котором $u_x \neq 0$ ". В [5] утверждается, что "волновой импульс" относится к общефизическим характеристикам волновых процессов и справедлив для волн любой природы". При этом делается акцент на различие обобщенного импульса системы и "волнового импульса". "Первый из них является линейной величиной относительно переменной u_t и используется как в сосредоточенных, так и распределенных системах. Второй является новой полевой характеристикой динамического процесса и имеет смысл только в распределенных системах".

Для волн в струне уравнение переноса "волнового импульса" получается в результате умножения уравнения колебаний струны $\rho u_{tt} - Nu_{xx} = 0$ на u_x :

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\rho u_t u_x) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(\rho u_t^2 + Nu_x^2) \right] = 0, \quad (2)$$

где ρ – погонная плотность, N – сила натяжения струны.

Здесь $p^W = -\rho u_t u_x$ – погонная плотность "волнового импульса", $T^W = 1/2[\rho u_t^2 + Nu_x^2]$ – сила "волнового давления". В частности, для гармонической волны вида $u = a \sin(\omega t - kx)$ имеем $p^W = \rho a^2 k \omega \cos^2(\omega t - kx)$. "Волновой импульс" квадратичен по амплитуде и направлен в сторону распространения волны. Следовательно, "волновое давление" положительно, то есть препятствие отталкивается набегающей волной. Среднее значение плотности механического импульса гармонической волны равно нулю: $\bar{p} = \rho \bar{u}_t = 0$, в то время как среднее значение "волнового импульса" $\bar{p}^W = 1/2 \rho \omega k a^2 \neq 0$.

Возникают вопросы о физическом смысле "волнового импульса" и "волнового давления", о необходимости и правомерности введения этих понятий при рассмотрении динамики распределенных систем, уравнения движения которых выводятся из уравнений Ньютона и для которых достаточно классических характеристик движения – импульса и давления.

Соотношение (2) для величин "волнового импульса" ($-\rho u_t u_x$) и "волнового давления" ($1/2 \rho u_t^2 + 1/2 Nu_x^2$) имеет вид закона сохранения

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial c_k}{\partial x_k} = 0. \quad (3)$$

Его можно интерпретировать как уравнение баланса скорости изменения величины a и ее потока через единичную площадку. Но, вообще говоря, это соотношение не определяет однозначно входящие в них величины. Дело в том, что к a , c_k можно добавить величины $a^{(1)}$, $c_k^{(1)}$, удовлетворяющие тождеству

$$\frac{\partial a^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial c_k^{(1)}}{\partial x_k} = 0,$$

которые не влияют на форму исходного уравнения (3), но изменяют вид входящих

в них величин. Это известный, в частности в теории электромагнитного поля, факт. Подобные преобразования называют калибровкой.

Таким образом, понятия "волнового импульса" и "волнового давления" являются результатом математических рассуждений. Вопрос об их содержании и обоснованности использования при рассмотрении волновых движений в средах остается открытым. Известно [6, 7], что формальное применение этих понятий и соотношений вида (3) может приводить к неверным результатам. Существенным моментом является то, что рассматриваемые "волновые" характеристики квадратичны по амплитуде деформаций, а используются обычно при рассмотрении линейных моделей. Возникающие противоречия при подсчете усилий на границе среды и вычислении импульса волн с "волновыми" характеристиками проиллюстрируем на простом примере о воздействии волнового возмущения на закрепленный конец стержня.

2. Рассмотрим простейшую одномерную задачу о малых продольных колебаниях полуграниченного стержня, закрепленного на одном конце. С точностью до членов второго порядка малости уравнение движения стержня имеет вид

$$u_{tt} - c_0^2 u_{xx} + \beta u_x u_{xx} = 0, \quad (4)$$

где $u(x, t)$ – продольные смещения, причем $|u| \ll 1$, $|u_x| \ll 1$, $|u_{xx}| \ll 1$; β – параметр, характеризующий нелинейные свойства системы. На закрепленном конце стержня $x = 0$ выполняется условие $u(0, t) = 0$.

Представим решение в виде суммы величин первого и второго порядка малости: $u = u_1 + u_2$. Тогда задача (4) сводится к решению системы уравнений:

$$u_{1tt} - c_0^2 u_{1xx} = 0, \quad (5)$$

$$u_{2tt} - c_0^2 u_{2xx} + \beta u_{1x} u_{1xx} = 0.$$

Остановимся на случае, когда возбуждается локализованная волна, бегущая влево (в сторону закрепленного конца) и описываемая в линейном приближении непрерывной функцией $u_1(x, t) = f(x + c_0 t)$, заданной на интервале $x_0 - c_0 t < x < x_0 - c_0 t + a$. В начальный момент времени $t = 0$ $f(x_0) = f(x_0 + a) = 0$. При $t = 0$ волна находится полностью справа от ограничителя ($x_0 > 0$), при $t > 0$ движется в сторону закрепленного конца стержня. В точке $x = x_0 - c_0 t$ (при $x_0 > 0$) – передний фронт волны, а $x = x_0 - c_0 t + a$ отвечает ее заднему фронту. При $t_1 = x_0 / c_0$ передний фронт достигает ограничителя и волна начинает отражаться. В момент времени $t_2 = (x_0 + a) / c_0$ закрепленного конца достигает и задний фронт, то есть при $t \geq t_2$ волна полностью отразилась.

Определим давление в точке закрепления стержня, создаваемое волной. Для этого найдем решение уравнения второго приближения

$$u_{2tt} - c_0^2 u_{2xx} = -\frac{\beta}{2} [f_x^2(x + c_0 t)]_x.$$

По формуле Даламбера при указанных нулевых начальных условиях получим

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= -\frac{\beta}{4c_0} \int_0^t dt' \int_{x-c_0(t-t')}^{x+c_0(t-t')} [f_\xi^2(\xi + c_0 t')]_\xi d\xi = \\ &= \frac{\beta}{4c_0} \int_0^t [f_x^2(x - c_0 t + 2c_0 t') - f_x^2(x + c_0 t)] dt'. \end{aligned}$$

Уравнению (4) можно придать форму:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

где $p = \rho u_t$ – плотность обобщенного импульса, $T = \rho(-c_0^2 u_x + \beta/2 u_x^2)$ – сила в сечении x .

Воздействие R на границу определяется по значению силы T : $R = -T|_{x=0}$. С другой стороны, проинтегрировав уравнение (6) сначала по времени, а затем по координате, получим:

$$\int_0^t [T(x_2, t) - T(x_1, t)] dt = - \int_{x_1}^{x_2} [p_{\text{отр}}(x, t_2) - p_{\text{пад}}(x, t_1)] dx.$$

Это означает, что суммарное усилие, действующее на стержень, протяженностью $x_2 - x_1$ за время t равно разности импульсов падающей на ограничитель и отраженной от него волн. Интересуясь усилием в месте закрепления, положим $x_1 = 0$ и будем считать, что в точку x_2 возмущение еще не пришло, то есть $T(x_2, t) = 0$. Тогда левая часть полученного соотношения запишется в виде $-\int_{x_0/c_0}^{(x_0+a)/c_0} T(0, t) dt$. Пределы интегрирования – моменты времени начала и окончания взаимодействия волны с ограничителем. Правая часть соотношения равна $\int_{x_0-c_0t_1}^{x_0-c_0t_1+a} p_{\text{пад}}(x, t_1) dx - \int_{x_0-c_0t_2}^{x_0-c_0t_2+a} p_{\text{отр}}(x, t_2) dx$, где $t_1 \leq x_0/c_0$ – время, когда волна не достигла еще ограничителя, $t_2 \geq (x_0+a)/c_0$ – время, когда отражение завершилось.

Вычислим импульс P и силу R на границе по линейной модели. Импульс падающей волны $P_{\text{пад}}(t_1)$ определяется выражением:

$$P_{\text{пад}}(t_1) = \int_{x_0-c_0t_1}^{x_0+a-c_0t_1} \rho u_{1t}(x, t_1) dx = \\ = \rho \int_{x_0-c_0t_1}^{x_0+a-c_0t_1} c_0 f_x(x + c_0t_1) dx = \rho c_0 (f(x_0+a) - f(x_0)) = 0.$$

Для вычисления импульса отраженной волны

$$P_{\text{отр}}(t_2) = \int_{-x_0-a+c_0t_2}^{-x_0+c_0t_2} \rho u_{1t}(x, t_2) dx$$

найдем $u_{1\text{отр}}(x, t)$. Рассмотрим, следуя [8], безграничный стержень с краевым условием $u(0, t) = 0$. По стержню навстречу друг другу бегут две волны $u_+(x + c_0t) + u_-(-x + c_0t)$. В сечении $x=0$ $u_-(c_0t) = -u_+(c_0t)$. Взяв в качестве решения $u(x, t) = u_+(x + c_0t) - u_-(-x + c_0t)$ и рассматривая его только при $x \geq 0$, получим решение исходной задачи. Отраженной волной будет $u_{1\text{отр}}(x, t) = -f(-x + c_0t)$, где $t \geq (x_0 + a)/c_0$. Импульс этой волны

$$P_{\text{отр}}(t_2) = \int_{-x_0-a+c_0t_2}^{-x_0+c_0t_2} \rho u_{1t}^{\text{отр}}(x, t_2) dx = -\rho \int_{-x_0-a+c_0t_2}^{-x_0+c_0t_2} c_0 f_x(-x + c_0t_2) dx = 0.$$

Возмущение первого приближения не несет импульса при произвольной функ-

ции f , равной нулю на концах интервала. Величина воздействия на границу в этом случае равна:

$$R|_{x=0} = P_{\text{пад}}(t_1) - P_{\text{отр}}(t_2) = 0.$$

Такой же результат для усилия в точке закрепления получается из выражения $-\int_{x_0/c_0}^{(x_0+a)/c_0} T(0, t) dt$, где

$$T(0, t) = -\rho c_0^2 u_{1x}(0, t) = -\rho c_0^2 (u_{1x}^{\text{пад}}(0, t) - u_{1x}^{\text{отр}}(0, t)) = -2\rho c_0^2 f_x(c_0 t).$$

Определим вклад волн второго приближения. Для импульса $P(t_1)$ в момент времени $t_1 \leq x_0/c_0$ имеем

$$P(t_1) = \int_{x_0 - c_0 t_1}^{x_0 - c_0 t_1 + a} \rho u_{2t}(x, t_1) dx,$$

где

$$u_{2t}(x, t_1) = -\frac{\beta}{8c_0} \left[f_x^2(x + c_0 t_1) - f_x^2(x - c_0 t_1) + 2c_0 t_1 [f_x^2(x + c_0 t_1)]_x \right].$$

Заметим, что возбужденная волна, бегущая влево, благодаря наличию нелинейности, распадается на группу волн, бегущих в том же направлении, и волну, бегущую вправо. Рассматривая вклад волн, взаимодействующих с ограничителем, находим:

$$\begin{aligned} P_{\text{пад}}(t_1) &= -\frac{\beta \rho}{8c_0} \left\{ \int_{x_0 - c_0 t_1}^{x_0 - c_0 t_1 + a} f_x^2(x + c_0 t_1) dx + 2c_0 t_1 \int_{x_0 - c_0 t_1}^{x_0 - c_0 t_1 + a} [f_x^2(x + c_0 t_1)]_x dx \right\} = \\ &= -\frac{\beta \rho}{8c_0} \left\{ \int_{x_0}^{x_0 + a} f_x^2(x) dx + 2c_0 t_1 [f_x^2(x_0) - f_x^2(x_0 + a)] \right\} = -\frac{\beta \rho}{8c_0} \int_{x_0}^{x_0 + a} f_x^2(x) dx. \end{aligned}$$

Окончательное равенство записано при дополнительном предположении $f_x(x_0) = f_x(x_0 + a) = 0$.

Импульс $P(t_2)$ в момент времени $t_2 \geq (x_0 + a)/c_0$ определяется выражением

$$P(t_2) = \int_{-x_0 - a + c_0 t_2}^{-x_0 + c_0 t_2} \rho u_{2t}^{\text{отр}}(x, t_2) dx,$$

где

$$u_{2t}^{\text{отр}}(x, t_2) = \frac{\beta}{8c_0} \left[f_x^2(-x + c_0 t_2) + 2c_0 t_2 [f_x^2(-x + c_0 t_2)]_x \right].$$

В результате интегрирования находим

$$P_{\text{отр}}(t_2) = \frac{\beta \rho}{8c_0} \int_{x_0}^{x_0 + a} f_x^2(x) dx = -P_{\text{пад}}(t_1).$$

Для воздействия волны на границу имеем

$$R|_{x=0} = P_{\text{пад}}(t_1) - P_{\text{отр}}(t_2) = -\frac{\beta \rho}{4c_0} \int_{x_0}^{x_0 + a} f_x^2(x) dx.$$

К такому же результату для усилия в точке закрепления приходим и другим путем:

$$R|_{x=0} = - \int_{x_0/c_0}^{(x_0+a)/c_0} T(0, t) dt,$$

где

$$T(0, t) = -\rho c_0^2 u_{2x}(0, t) + \frac{\rho\beta}{2} u_{1x}^2(0, t).$$

Однако надо иметь в виду следующее. Во-первых, в выражении

$$u_{2x}(x, t) = -\frac{\beta}{8c_0^2} [f_x^2(x - c_0 t) - f_x^2(x + c_0 t) + 2c_0 t [f_x^2(x + c_0 t)]_x]$$

надо опустить первый член, так как он не сказывается на воздействии на ограничитель. Во-вторых, падающая на ограничитель волна $f(x + c_0 t)$ порождает отраженную волну $-f(-x + c_0 t)$. При этом $u(0, t) = f(c_0 t) - f(c_0 t) = 0$, производная по времени $u_t(0, t) = 0$, однако $u_x(0, t) = 2f_x(c_0 t)$. С учетом этого после интегрирования по t получим

$$R|_{x=0} = -\frac{\beta\rho}{4c_0} \int_{x_0}^{x_0+a} f_x^2(x) dx.$$

Таким образом, ответ на вопрос о воздействии волны на границу упругой системы различен при рассмотрении задачи в рамках линейной и нелинейной моделей. В рассматриваемом случае интегральное давление возникает лишь при наличии нелинейности. Оно может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака коэффициента нелинейности β . Сказанное относится и к импульсу волны, причем импульс волны не связан с направлением ее распространения, его знак определяется параметром нелинейности.

Заметим, что в линейной модели перенос импульса возможен лишь при разрыве продольных смещений на границе области возмущения. Такое условие является нефизичным. Анализ волнового движения следует уточнить введением в модель нелинейности. При этом оказывается, что локализованная волна несет импульс и в том случае, когда на ее границах отсутствуют продольные смещения, даже при нулевых их первых производных по координате.

Остановимся теперь на том, к чему привело бы рассмотрение этой задачи с использованием понятий "волнового импульса" и "волнового давления". После умножения на u_x первое из уравнений (5) приводится к виду

$$\frac{\partial p^W}{\partial t} + \frac{\partial T^W}{\partial x} = 0,$$

где $p^W = -\rho u_t u_x$ – плотность "волнового импульса", $T^W = \rho/2 (u_t^2 + c_0^2 u_x^2)$ – "волновое давление" в сечении x .

Для рассматриваемого возмущения $u(x, t) = f(x + c_0 t)$ имеем следующее. "Волновой импульс" падающей волны $P_{\text{пад}}^W(t_1)$ определяется выражением:

$$P_{\text{пад}}^W(t_1) = -\rho \int_{x_0 - c_0 t_1}^{x_0 + a - c_0 t_1} c_0 f_x^2(x + c_0 t_1) dx = -\rho c_0 \int_{x_0}^{x_0 + a} f_x^2(x) dx. \quad (7)$$

"Волновой импульс" отраженной волны $P_{\text{отр}}^W(t_2)$ имеет вид:

$$P_{\text{отр}}^W(t_2) = \rho \int_{-x_0 - a + c_0 t_2}^{-x_0 + c_0 t_2} c_0 f_x^2(-x + c_0 t_2) dx = \rho c_0 \int_{x_0}^{x_0 + a} f_x^2(x) dx = -P_{\text{пад}}^W(t_1). \quad (8)$$

Величина воздействия на границу в этом случае равна

$$R|_{x=0} = P_{\text{пад}}^W(t_1) - P_{\text{отр}}^W(t_2) = -2\rho c_0 \int_{x_0}^{x_0 + a} f_x^2(x) dx,$$

что совпадает с результатом интегрирования "волнового давления" по времени:

$$R|_{x=0} = - \int_{x_0/c_0}^{(x_0+a)/c_0} T^W(0, t) dt = -2\rho c_0^2 \int_{x_0/c_0}^{(x_0+a)/c_0} f_x^2(c_0 t) dt = -2\rho c_0 \int_{x_0}^{x_0+a} f_x^2(x) dx. \quad (9)$$

Таким образом, "волновой импульс" P^W отличен от нуля и направлен в сторону распространения волны. Изменение "волнового импульса" при отражении волны от ограничителя совпадает с положительным "волновым давлением" на закрепленный конец стержня. Этот результат отличается от решения, полученного с помощью классических понятий.

Рассмотрим эту же задачу для случая, когда конец стержня свободен, то есть $u_x(0, t) = 0$ при $x = 0$. Рассуждения при нахождении импульса волны и воздействия на границу аналогичны случаю жестко закрепленного конца. В рамках линейной модели импульс $P_{\text{пад}}(t_1)$ падающей волны $u_1(x, t) = f(x + c_0 t)$ и импульс $P_{\text{отр}}(t_2)$ отраженной волны $u_{1\text{отр}}(x, t) = f(-x + c_0 t)$, $t \geq (x_0 + a)/c_0$, равны нулю. Величина воздействия на границу в этом случае также равна нулю.

Рассмотрим волны второго приближения. Импульс $P(t_1)$ в момент времени $t_1 \leq x_0/c_0$, как и в предыдущем случае, определяется выражением

$$P(t_1) = \int_{x_0 - c_0 t_1}^{x_0 - c_0 t_1 + a} \rho u_{2t}(x, t_1) dx,$$

где

$$u_{2t}(x, t_1) = -\frac{\beta}{8c_0} [f_x^2(x + c_0 t_1) - f_x^2(x - c_0 t_1) + 2c_0 t_1 [f_x^2(x + c_0 t_1)]_x].$$

При дополнительном предположении, что $f_x(x_0) = f_x(x_0 + a) = 0$ для импульса падающей волны имеем

$$P_{\text{пад}}(t_1) = -\frac{\beta \rho}{8c_0} \int_{x_0}^{x_0 + a} f_x^2(x) dx.$$

Импульс $P(t_2)$ в момент времени $t_2 \geq (x_0 + a)/c_0$ запишется следующим образом:

$$P(t_2) = \int_{-x_0 - a + c_0 t_2}^{-x_0 + c_0 t_2} \rho u_{2t}^{\text{отр}}(x, t_2) dx,$$

где

$$u_{2t}^{\text{отр}}(x, t_2) = -\frac{\beta}{8c_0} [f_x^2(-x + c_0 t_2) + 2c_0 t_2 [f_x^2(-x + c_0 t_2)]_x].$$

Производя вычисления, находим

$$P_{\text{отр}}(t_2) = -\frac{\beta\rho}{8c_0} \int_{x_0}^{x_0+a} f_x^2(x) dx = P_{\text{пад}}(t_1).$$

Таким образом, при отражении волны от свободного конца стержня ее импульс не меняет свое направление, и суммарное усилие на границу в этом случае равно нулю:

$$R|_{x=0} = P_{\text{пад}}(t_1) - P_{\text{отр}}(t_2) = 0.$$

При этом решение данной задачи с использованием "волновых" характеристик по-прежнему дает результат (7)–(9), то есть "волновой" подход не только приводит к неправильному результату, но и не различает случаи свободного конца стержня и его жесткого закрепления.

Отметим, что и в рамках линейной модели наблюдается свойство импульса волны изменять или сохранять в зависимости от вида граничного условия свое направление по отношению к направлению распространения волны, хотя в литературе можно встретить утверждение, что импульс переносится в направлении распространения волны.

Пусть $f(x_0) \neq f(x_0 + a) \neq 0$. Импульс падающей волны $u_1(x, t) = f(x + c_0 t)$ равен

$$P_{\text{пад}}(t_1) = \int_{x_0 - c_0 t_1}^{x_0 - c_0 t_1 + a} \rho u_{1t}(x, t_1) dx = \rho \int_{x_0 - c_0 t_1}^{x_0 + a - c_0 t_1} c_0 f_x(x + c_0 t_1) dx = \rho c_0 (f(x_0 + a) - f(x_0)).$$

Импульс отраженной волны $u_{1\text{отр}}(x, t) = f(-x + c_0 t)$, $t \geq (x_0 + a)/c_0$, при свободной границе, когда $u_x(0, t) = 0$, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{\text{отр}}(t_2) &= \int_{-x_0 - a + c_0 t_2}^{-x_0 + c_0 t_2} \rho u_{1t}^{\text{отр}}(x, t_2) dx = \\ &= \rho \int_{-x_0 - a + c_0 t_2}^{-x_0 + c_0 t_2} c_0 f_x(-x + c_0 t_2) dx = \rho c_0 (f(x_0 + a) - f(x_0)), \end{aligned}$$

то есть импульс остается неизменным как по величине, так и по направлению, хотя направление распространения волны в результате взаимодействия ее с границей стержня сменилось на противоположное.

Нетрудно удостовериться, что при краевом условии $u(0, t) = 0$ направление импульса волны и направление ее распространения после отражения на границе совпадают.

3. В исследовании поперечных движений одномерных упругих систем обнаруживается еще одна особенность, которую следует иметь в виду при вычислении сил, возникающих на границе системы. Это необходимость учета нелинейной связи поперечных и продольных движений как в уравнениях движения, так и в краевых условиях.

В случае поперечных колебаний струны плотность функции Лагранжа имеет вид:

$$\lambda = \frac{1}{2} \rho_0 (1 - u_x) (u_t^2 + v_t^2) - \frac{1}{2} T_0 \left(\sqrt{(1 + B + u_x)^2 + v_x^2} - 1 \right)^2, \quad (10)$$

где через $u(x, t)$ и $v(x, t)$ обозначены соответственно продольные и поперечные сме-

шения точек струны, ρ_0 – невозмущенное значение плотности, T_0 – сила натяжения струны, $B = \partial u_0 / \partial x$ – начальное постоянное растяжение струны.

Уравнения движения с точностью до членов второго порядка малости записываются следующим образом:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = u_x u_{tt} + 2u_{xt} u_t + v_t v_{tx} + a^2 (1 - \gamma^2)^2 v_x v_{xx},$$

$$v_{tt} - \gamma^2 a^2 v_{xx} = (u_x v_t)_t + a^2 (1 - \gamma^2)^2 (v_x u_x)_x,$$

где $a^2 = T_0 / \rho_0$, $\gamma^2 = B / (1 + B)$.

Представляя решение в виде суммы величин первого и второго порядка малости $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, приходим в первом приближении к независимым уравнениям поперечных и продольных движений струны:

$$u_{1tt} - a^2 u_{1xx} = 0,$$

$$v_{1tt} - \gamma^2 a^2 v_{1xx} = 0.$$

Смещения u_2 и v_2 определяются при решении системы уравнений

$$u_{2tt} - a^2 u_{2xx} = u_{1x} u_{1tt} + 2u_{1xt} u_{1t} + v_{1t} v_{1tx} + a^2 (1 - \gamma^2)^2 v_{1x} v_{1xx},$$

$$v_{2tt} - \gamma^2 a^2 v_{2xx} = (u_{1x} v_{1t})_t + a^2 (1 - \gamma^2)^2 (v_{1x} u_{1x})_x.$$

Возбуждение поперечных волн в первом приближении приводит к образованию продольных волн во втором. Но обычно "волновое давление" вычисляют по решению линейных задач. Ошибочность такого подхода продемонстрирована ранее на примере продольных движений в одномерной упругой системе. Здесь же покажем, что решение задачи о воздействии волн на препятствие существенно зависит и от вида препятствия, от характеризующих его нелинейных факторов. С этой целью, а также для придания изложению простоты и наглядности ограничимся рассмотрением статических задач.

Рассмотрим струну, длина которой в недеформированном состоянии l_0 . В начальный момент струна натянута между двумя закреплениями, находящимися на расстоянии $2l_1$ друг от друга. Сила постоянного натяжения струны равна $T_0 = k(2l_1 - l_0)$, где k – коэффициент упругости струны. В средней точке приложена постоянная сила F (рис. 1) такая, что угол отклонения струны от горизонтали равен α ($\alpha \ll 1$).

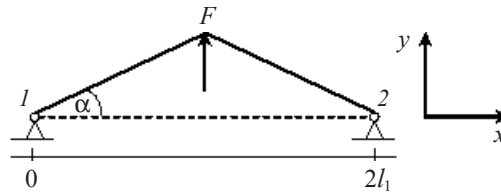


Рис. 1

При этом связь u_x и v_x с величиной α получается из соотношений $du = dl \cos \alpha$, $dv = dl \sin \alpha$, где $dl = \sqrt{(1 + B + u_x)^2 + v_x^2} dx$ – длина элемента струны после деформации. Для статической задачи $u_t = 0$, $v_t = 0$. С учетом этого вычисление силы, с которой струна действует на каждое закрепление, а точнее, добавки к натяжению T_0 ,

появляющейся вместе с отклонением струны от равновесного состояния, можно проводить исходя из выражения

$$R = - \left. \frac{\partial \lambda}{\partial u_x} \right|_{x=0}^{x+l_0},$$

то есть аналогично тому, как это было сделано в п. 2, но можно воспользоваться и соотношениями статики.

Обозначим через R_{ij} j -ю компоненту силы, действующую со стороны струны на границу с номером i ($i = 1, 2; j = x, y$). В точке левого закрепления справедливы следующие соотношения: $R_{1x} = T \cos \alpha$, $R_{1y} = T \sin \alpha$, где T – сила натяжения струны, $T = k(2l_1 / \cos \alpha - l_0)$.

Отсюда, считая угол α малым и ограничиваясь членами второго порядка, получим:

$$R_{1x} \approx T_0 + kl_0 \frac{\alpha^2}{2}, \quad R_{1y} \approx T_0 \alpha.$$

В рассматриваемом случае отклонение струны приводит к дополнительному продольному усилию на закрепление, направленному в противоположную сторону от границы, так как $kl_0 \alpha^2 / 2 > 0$.

Проводя аналогичные рассуждения для правого закрепления, приходим к следующим компонентам силы:

$$R_{2x} \approx -T_0 - kl_0 \frac{\alpha^2}{2}, \quad R_{2y} \approx T_0 \alpha.$$

Дополнительная продольная сила направлена влево, стремясь влево сдвинуть границу, то есть оказывает дополнительное отрицательное "давление".

Таким образом, воздействие струны на границы в случае жесткой заделки обоих концов одинаково по величине и противоположно по направлению, оно возрастает с увеличением угла α , стремясь сблизить границы. Подчеркнем, что в линейной модели силы R_{1x} , R_{2x} обусловлены начальным натяжением струны: $R_{1x} = -R_{2x} = T_0$.

Рассмотрим случай, когда струна по-прежнему жестко закреплена на концах, но в точках 1 и 2 имеются кольцевые ограничители, то есть струна ограничена в этих местах только в вертикальном перемещении (рис. 2). В этой задаче начальное натяжение $T_0 = k(2l_1 + 2l_2 - l_0)$.

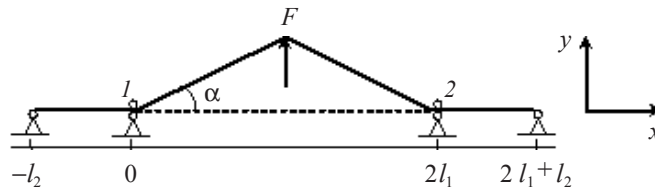


Рис. 2

Воздействие струны на ограничитель в точке 1 имеет составляющие

$$R_{1x} = T \cos \alpha - T, \quad R_{1y} = T \sin \alpha,$$

а в точке 2 компоненты силы запишутся в виде:

$$R_{2,x} = -T \cos \alpha + T, \quad R_{2,y} = T \sin \alpha$$

Здесь сила натяжения струны $T = k(2l_1 / \cos \alpha + 2l_2 - l_0)$.

Разложение приведенных выражений для компонент сил с точностью до членов второго порядка малости дает

$$R_{1,x} \approx -T_0 \frac{\alpha^2}{2}, \quad R_{1,y} \approx T_0 \alpha \quad \text{и} \quad R_{2,x} \approx T_0 \frac{\alpha^2}{2}, \quad R_{2,y} \approx T_0 \alpha.$$

Продольная составляющая силы действия струны на закрепление, ограничивающее лишь поперечные смещения, есть величина, нелинейная по α . Она возникает только при наличии отклонений и направлена в сторону ограничителей, то есть "давит" на них, что существенно отличается от первого случая, когда при $\alpha \neq 0$ производится дополнительное отрицательное давление.

Таким образом, решение вопроса о воздействии упругой системы на границу зависит от вида граничных условий. Различие как по величине, так и по знаку действующих на границы сил проявляется лишь в рамках нелинейной модели.

"Волновое давление", хотя и является величиной квадратичной по амплитуде деформаций, вычисляется обычно по линейным моделям. В случае рассматриваемых статических задач "волновой" подход дает в точках закрепления одинаковое значение силы вне зависимости от вида закрепления.

Плотность функции Лагранжа, отвечающая линейным поперечным колебаниям струны, следует из (10) и имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{2} \rho_0 v_t^2 - \frac{1}{2} T_0 v_x^2,$$

где ρ_0 – погонная плотность струны, $v(x, t)$ – поперечные смещения точек струны, T_0 – сила натяжения. Для статической задачи $v_t = 0$, $\text{tg} \alpha = v_x$. "Волновое давление" $T^W = \lambda - \partial \lambda / \partial v_x \cdot v_x$ в рассматриваемом случае равно $1/2 \cdot T_0 v_x^2$. Горизонтальная сила в точке закрепления $x = x_1$ определяется из соотношения [9]:

$$R_x = -T^W \Big|_{x=x_1-0}^{x=x_1+0}.$$

Отсюда сила, действующая на границу в точке 1, равна

$$R_{1,x} = -\frac{1}{2} T_0 v_x^2 \Big|_{x=-0}^{x=+0},$$

а в точке 2 –

$$R_{2,x} = -\frac{1}{2} T_0 v_x^2 \Big|_{x=2l_1-0}^{x=2l_1+0}.$$

При малых значениях угла отклонения струны от горизонтали α

$$R_{1,x} = -\frac{1}{2} T_0 \alpha^2, \quad R_{2,x} = \frac{1}{2} T_0 \alpha^2.$$

В рамках "волнового" подхода этот результат справедлив для обоих рассматриваемых случаев закрепления точек 1 и 2 (см. рис. 1, 2). С полученным на основе соотношений статики решением он совпадает лишь в случае кольцевых ограничи-

телей в точках 1 и 2. При жесткой заделке граничных точек струны результат отличается.

Таким образом, введенные формально понятия "волнового импульса" и "волнового давления", интерпретируемые, исходя из сомнительных аналогий и размерности, как специфические характеристики волнового движения, могут приводить при рассмотрении волновых движений в упругих системах к неверным результатам.

Задачи о воздействии волн на препятствия требуют детального исследования в каждом конкретном случае с учетом различных нелинейных факторов. В первую очередь это касается тех случаев, когда волна при линейном рассмотрении не обладает импульсом. Упрощенное решение вопросов динамики упругих систем на основе "волнового импульса" и "волнового давления" неправомерно.

Ключевые слова: импульс сил, импульс волн, отражающее препятствие, волновой импульс, волновое давление.

Литература

1. *Весницкий, А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками / А.И. Весницкий. – М.: Физматлит, 2001.
2. *Весницкий, А.И.* Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики с движущимися закреплениями и нагрузками / А.И. Весницкий, Л.З. Каплан, Г.А. Уткин // Дифференциальные и интегральные уравнения / Горьков. ун-т, Горький. – 1982.
3. *Весницкий, А.И.* Законы изменения энергии и импульса одномерных распределенных систем с движущимися границами и нагрузками / А.И. Весницкий, Л.З. Каплан, Г.А. Уткин // ПММ. –1983. – Т. 47, № 5.
4. *Лич, Дж.У.* Классическая механика / Дж.У. Лич. – М.: Изд-во ин. лит., 1961.
5. *Островский, Л.А.* Введение в теорию модулированных волн / Л.А. Островский, А.И. Потапов. – М.: Физматлит, 2003.
6. *Денисов, Г.Г.* К вопросу о давлении волн на преграду в случае поперечных колебаний струны / Г.Г. Денисов // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – №5.
7. *Денисов, Г.Г.* О волновом импульсе и усилиях, возникающих на границе одномерной упругой системы / Г.Г. Денисов // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – №1.
8. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977.
9. *Крысов, С.В.* Вынужденные колебания и резонанс в упругих системах с движущимися нагрузками: Метод. пособие / С.В. Крысов. – Горьков. ун-т, Горький. – 1985.

[26.05.2008]

ON THE ISSUE OF A PULSE OF ELASTIC WAVES AND THEIR EFFECT UPON AN OBSTACLE

G.G. Denisov, V.V. Novikov, M.L. Smirnova

Using simple examples, it is shown that, in calculating a pulse of waves and forces arising upon interaction of the waves with a reflecting obstacle, the nonlinear factors in the equations of motion of elastic systems and in the boundary conditions have to be taken into account. The simplified approach to the above problems based on the notions of a "wave pulse" and "wave pressure" is shown to be inconsistent.

Key words: pulse of waves, pulse of forces, reflecting obstacle, wave pulse, wave pressure.