

УДК 539.3

**ЕДИНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ  
ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ  
ПРИ ПОЛНОЙ И ЧАСТИЧНОЙ РАЗГРУЗКЕ****А.Н. Супрун, Т.М. Вежелис***Нижний Новгород*

Анализируются известные результаты экспериментального изучения границ текучести в пространстве напряжений, полученных после пропорционального неупругого нагружения. Показано, что существенные качественные различия форм и положений поверхностей текучести при полной и частичной разгрузке образца необъяснимы с позиций склерономной теории пластичности. Указанный феномен находит объяснение в реономной теории пластичности как влияние эффекта релаксации деформационного упрочнения материала. Предлагается описывать эволюцию последовательной поверхности текучести в двумерном пространстве А.А. Ильюшина в виде эллипса, претерпевающего изменения во времени своих параметров (полуосей и координат центра на плоскости). При этом для указанных параметров вводится наследственный характер зависимости от развивающейся во времени истории неупругой деформации. Описывается методика определения констант материала. Приводится пример построения введенной модели, демонстрирующий хорошее приближение к известным результатам опытного определения поверхности текучести одновременно как при полной, так и при частичной разгрузке образца.

История развития строительной механики деформируемого твердого тела насчитывает более трехсот лет. Даже беглый обзор важных исследований в механике твердого тела, выполненных за последние триста лет, отчетливо выявляет обилие различающихся опытных данных. На это указал в своей работе Д.Ф. Белл [1]. Там же он отметил, что эти различия породили распространенное мнение о том, что результаты экспериментов с твердыми телами существенно зависят от индивидуальных особенностей каждого исследуемого образца. Там же указывалось на отсутствие правдоподобных теорий, которые в большинстве случаев могли бы объяснить несоответствие уже выполненных экспериментальных наблюдений.

До настоящего времени положение в экспериментальной механике практически не изменилось. Это касается прежде всего проблемы опытного определения последовательной поверхности текучести (ППТ) металлов.

Особенно ярко существенные противоречия в результатах экспериментов по определению ППТ проявляются при сравнении поверхностей текучести, полученных после частичной и полной разгрузки образца.

Типичный результат исследования, полученный Е. Shiratori, К. Ikegami, К. Kaneko и Т. Sugibashi (см. в [2]), приведен на рис. 1, *а* и *б*. На них показаны начальная граница текучести (пунктир) и последовательные границы после предварительного

растяжения до  $\epsilon = 2, 6, 12, 20$  и  $30\%$  и полной разгрузки (рис. 1,а), а также после частичной разгрузки (рис. 1,б). Заметим, что при полной разгрузке (см. рис. 1,а) здесь, как и во всех известных экспериментах такой последовательности определения ППТ, кривые охватывают начало координат. Те же авторы приводят результаты и других экспериментов, отличающихся только тем, что после растяжения выполнялась частичная разгрузка. Из рис. 1,б видно, что полученные кривые не охватывают начало координат.

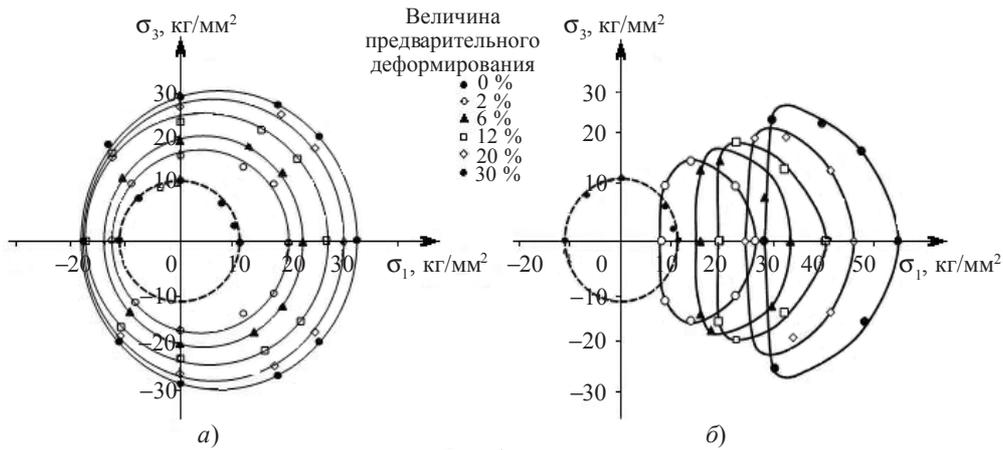


Рис. 1

Как видно из сопоставления двух серий экспериментов, они не согласуются в рамках общепринятых представлений об эволюции последовательной поверхности текучести. Действительно, совместим на одном чертеже (рис. 2) границы текучести, полученные после растяжения ( $\epsilon = 2\%$ ) и полной (а), и частичной (б) разгрузки. Далее будем рассуждать так: если кривая *b* действительно является последовательной кривой текучести при частичной разгрузке, то после полного снятия напряжения она должна была бы переместиться в направлении вектора **d** в положение *c*, то есть касаться оси  $\sigma_3$ . Однако это противоречит эксперименту, в соответствии с которым граница текучести при полной разгрузке заключает внутри себя начало координат – положение *a* на рис. 2.

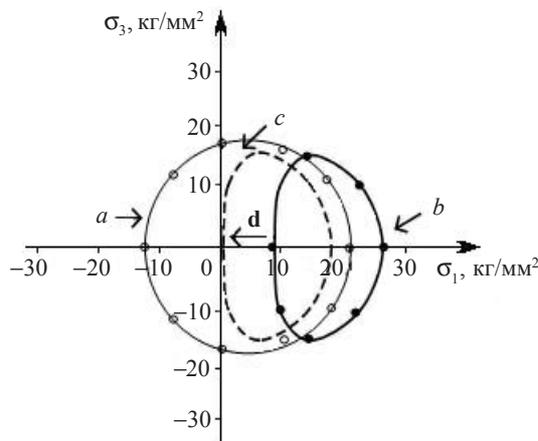


Рис. 2

Для того чтобы кривая  $b$  при полной разгрузке преобразовалась в кривую  $a$ , необходимо, чтобы последовательная поверхность текучести "бежала" впереди точки нагружения. А это выходит далеко за рамки наших сегодняшних представлений о законах движения последовательной поверхности текучести при активном нагружении. Отмеченное здесь противоречие результатов после полной и частичной разгрузок типично в экспериментальной механике.

Как указывалось в работах [3, 4], причина ряда противоречий в экспериментальных результатах – неконтролируемое проявление эффекта релаксации деформационного упрочнения, в процессе которого после пластического деформирования и разгрузки образца ППТ частично возвращается к положению, которое она занимала до начала нагружения. Моделирование этого процесса описывается теорией реономной пластичности [3].

Положим, что в недеформированном состоянии материал имел начальную границу текучести в виде эллипса на плоскости  $\sigma_1, \sigma_3$  А.А. Ильюшина (рис. 3). На рисунке через  $S_0$  и  $S$  обозначены соответственно положения ППТ в начальный ( $t=0$ ) и в некоторый момент времени  $t > 0$ .

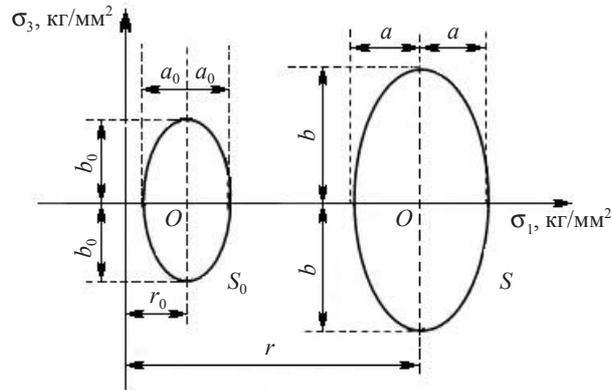


Рис. 3

Будем считать, что в процессе растяжения ( $\sigma_1 > 0$ ) кривая текучести изменяет свое положение и параметры, сохраняя симметрию относительно оси  $\sigma_1$ . Примем, что в каждый момент времени  $t$  величины  $a, b, r$  (см. рис. 3) будут иметь следующие наследственные зависимости от истории неупругого деформирования  $\epsilon(\tau)$  при  $d\epsilon(\tau)/d\tau \geq 0$  ( $\tau$  – время из интервала  $[0, t]$ ):

$$a = a_0 + \int_0^t \{c_1 + c_2 \exp[-\gamma(t - \tau)]\} d\epsilon(\tau), \quad (1)$$

$$b = b_0 + \int_0^t \{c_3 + c_4 \exp[-\gamma(t - \tau)]\} d\epsilon(\tau), \quad (2)$$

$$r = r_0 + \int_0^t \{c_5 + c_6 \exp[-\gamma(t - \tau)]\} d\phi[\epsilon(\tau)], \quad (3)$$

где  $c_1, \dots, c_6, \gamma$  – константы материала,  $\phi$  – функция материала. Примем, что

$$\phi(0) = 0, \quad (4)$$

$$c_5 + c_6 = 1. \quad (5)$$

Положим, что материал при  $t=0$  за пренебрежимо малый промежуток времени приобрел неупругую деформацию  $\varepsilon_*$ , а затем при  $t > 0$   $\varepsilon(t) = \varepsilon_* = \text{const}$ . Тогда, в соответствии со свойствами интегралов Стильбеса, из (1)–(3) при условии (4) для  $t > 0$  получим

$$a = a_0 + [c_1 + c_2 \exp(-\gamma t)]\varepsilon_*, \quad (6)$$

$$b = b_0 + [c_3 + c_4 \exp(-\gamma t)]\varepsilon_*, \quad (7)$$

$$r = r_0 + [c_5 + (1 - c_5) \exp(-\gamma t)]\varphi(\varepsilon_*). \quad (8)$$

Соотношения (6)–(8) будут описывать процесс движения и изменения параметров ППТ при частичной разгрузке, когда точка нагружения не выходит за пределы упругой зоны.

Заметим, что функцию  $\varphi$  можно найти из диаграммы деформирования материала. Действительно, положим, что известна диаграмма растяжения–полной разгрузки (рис. 4) в виде зависимости напряжения  $\sigma$  от неупругой деформации  $\varepsilon$ .

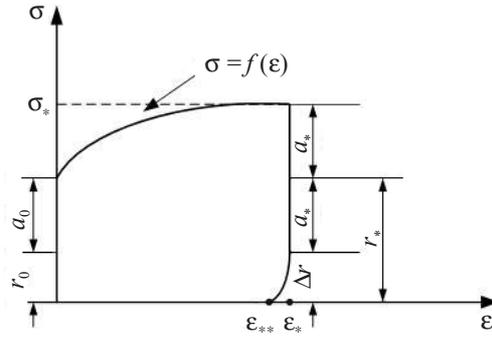


Рис. 4

Если эксперимент выполнен за пренебрежимо малый интервал времени (относительно протекающих в материале релакционных процессов), то из (6), (8) с учетом условия (5) при  $t=0$  для всякого  $\varepsilon$  получим

$$a = a_0 + g\varepsilon, \quad (9)$$

$$r = r_0 + \varphi(\varepsilon), \quad (10)$$

где  $g = c_1 + c_2$ . При известных  $a_0, a_*$  (см. рис. 4) найдем

$$g = (a_* - a_0) / \varepsilon_*. \quad (11)$$

Учитывая, что

$$\sigma = f(\varepsilon) = a + r, \quad (12)$$

из (9), (10), (12) получим

$$\varphi(\varepsilon) = f(\varepsilon) - g\varepsilon - a_0 - r_0. \quad (13)$$

В том случае, когда диаграмма деформирования материала неизвестна, следует упростить зависимость (3):

$$r = r_0 + \int_0^t \{c'_5 + c'_6 \exp[-\gamma(t - \tau)]\} d\varepsilon(\tau). \quad (14)$$

Отсюда для программы деформирования  $\varepsilon = 0$  при  $t < 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_* = \text{const}$  при  $t \geq 0$  получим

$$r = r_0 + [c'_5 + c'_6 \exp(-\gamma t)]\varepsilon_* \text{ при } t \geq 0. \quad (15)$$

Константы  $c_1, \dots, c_4, c'_5, c'_6, \gamma$  для модели (1), (2), (14) можно найти из условия минимума квадратичного отклонения экспериментальных и теоретических точек зондирования движущейся поверхности текучести.

Рассмотрим методику идентификации введенных модулей на примере результатов двух экспериментов при полной и частичной разгрузке (см. рис. 1) при  $\varepsilon = 2\%$ . Очевидно, что данных, приведенных на чертеже, недостаточно для решения поставленной задачи. По масштабу можно определить лишь параметры начальной границы текучести ( $a_0 = b_0 = 12,35 \text{ кг/мм}^2$ ,  $r_0 = 0$ ), а также координаты десяти экспериментальных точек границы после полной разгрузки одного образца и восьми точек после частичной разгрузки другого образца.

Для решения поставленной задачи указанные сведения достаточно дополнить следующей информацией: порядком зондирования точек границы, моментом времени выхода на каждую точку.

Предположительный порядок зондирования точек границы текучести указан на рис. 5, а и б. При этом было принято, что первая точка определяется в направлении первичного нагружения, а вторая – в противоположном направлении. Так делалось большинством экспериментаторов (см., например, в [5]). Относительно порядка определения последующих точек традиции не установились, поэтому порядок их определения был принят случайной расстановкой. Момент времени  $t$  выхода в каждую точку определяемой границы текучести отсчитывался с начала процесса разгрузки в некоторых условных единицах (у.е.) времени.

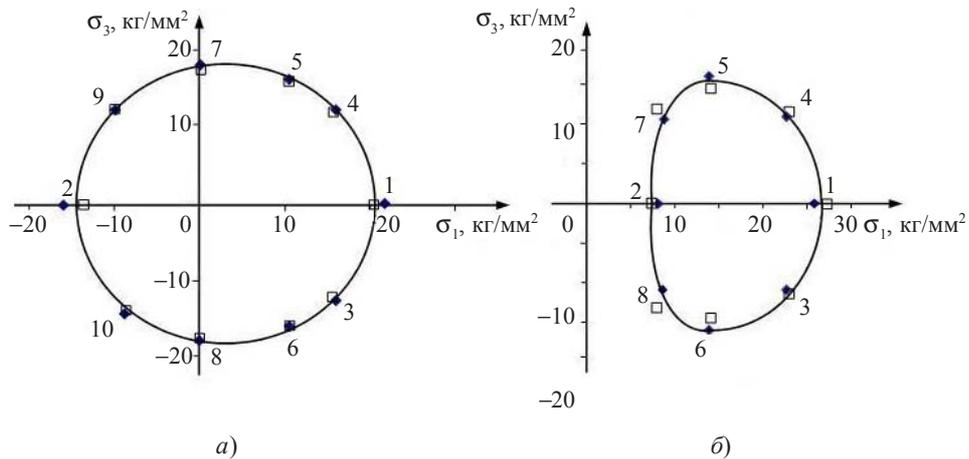


Рис. 5

В табл. 1, 2 приведены определенные по масштабу значения экспериментальных точек и принятое нами условное время  $t$  их получения.

Таблица 1

<b>Частичная разгрузка</b>				
<i>t</i> (у.е.)	Экспериментальные точки		Расчетные точки	
	$\sigma_1$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_3$
2,0	25,576	0	27,09008	0
2,1	8,096	0	7,39509	0
3,0	22,704	-10,98	22,98025	-11,48155
3,1	22,704	10,98	22,99068	11,49511
4,0	13,904	16,02	14,11077	14,47733
4,1	13,904	-16,02	14,10008	-14,51689
5,1	8,8	10,62	8,01194	11,87867
8,0	8,624	-10,98	7,23591	-13,74533

Таблица 2

<b>Полная разгрузка</b>				
<i>t</i> (у.е.)	Экспериментальные точки		Расчетные точки	
	$\sigma_1$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_3$
18	21,12	0	20,47864	0
19	-16,016	0	-13,58689	0
20	16,016	-12,6	15,69244	-12,27852
21	16,016	12,6	15,71575	12,30445
22	10,56	16,2	10,51707	16,10666
23	10,56	-16,02	10,59728	-16,09911
24	0	18	0	17,66667
25	0	-18	0	-17,73334
26	-9,856	12,6	-9,94431	12,68815
27	-8,8	-14,4	-8,54443	-14,08

Принципиальным различием принятых временных характеристик двух опытов является существенная разница во времени начала зондирования. Положено, что в эксперименте с частичной разгрузкой первая точка снималась по прошествии двух, а при полной разгрузке – через восемнадцать у.е. времени.

В качестве способа определения теоретических точек  $(\sigma_{1,k}^T; \sigma_{3,k}^T)$ , принадлежащих модели границы текучести в некоторый момент  $t_k$ , был использован метод пошагового поиска по лучу, исходящему из центра эллиптической границы текучести и проходящему через экспериментальную точку  $(\sigma_{1,k}^Э; \sigma_{3,k}^Э)$ , определенную в момент времени  $t_k$ . Поиск начинался от экспериментальной точки. Шаг поиска в итерационном процессе решения задачи уменьшался. Процесс поиска завершился, когда найденная расчетная точка с координатами  $(\sigma_{1,k}^T; \sigma_{3,k}^T)$  оказывалась достаточно близко к границе текучести или принадлежала ей. Критерий окончания поиска:

$$\left| \left( \frac{\sigma_{1,k}^T - r}{a} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{3,k}^T}{b} \right)^2 - 1 \right| \leq D2, \quad (16)$$

где  $D2$  – погрешность расчета.

Параметры определяющих соотношений вычислялись процедурой минимизации суммы квадратичных отклонений

$$D = \sum_{i=1}^{10} [(\sigma_{1,i}^T - \sigma_{1,i}^{\text{Э}})^2 + (\sigma_{3,i}^T - \sigma_{3,i}^{\text{Э}})^2] + \sum_{j=1}^8 [(\sigma_{1,j}^T - \sigma_{1,j}^{\text{Э}})^2 + (\sigma_{3,j}^T - \sigma_{3,j}^{\text{Э}})^2] \quad (17)$$

экспериментальных точек  $(\sigma_{1,k}^{\text{Э}}; \sigma_{3,k}^{\text{Э}})$  от теоретических  $(\sigma_{1,k}^T; \sigma_{3,k}^T)$ . В выражении (17) индексом  $i$  обозначены величины, относящиеся к опыту с полной разгрузкой, а индексом  $j$  – к опыту с частичной разгрузкой.

Движение возвращающейся границы текучести при частичной разгрузке принималось соотношениями (6), (7), (15). При полной разгрузке – для параметров  $a$  и  $b$  – теми же зависимостями (6), (7), но для положения границы на плоскости – соотношением

$$r = r_0 + [c'_5 + c'_6 \exp(-\gamma t)] \varepsilon_* - \Delta r, \quad (18)$$

где  $\Delta r$  – величина перемещения границы текучести при разгрузке (см. рис. 4). В связи с малостью разности неупругих деформаций  $\varepsilon_{**} - \varepsilon_*$  относительно  $\varepsilon_*$  влиянием разгрузки на релаксационные процессы в материале пренебрегаем.

С использованием программных средств моделирования эволюции ППТ [6–8] были получены следующие значения параметров:

$$\begin{aligned} c_1 &= 323,8079; & c_2 &= -548,4145; \\ c_3 &= 305,1371; & c_4 &= -276,1945; \\ c'_5 &= 501,9073; & c'_6 &= 441,2226 \text{ (кг/мм}^2\text{)}; \\ \gamma &= 0,09579122 \text{ (у.е.}^{-1}\text{)}. \end{aligned}$$

На рис. 5, *a* и *б* указаны положения экспериментальных (черные ромбы) и теоретических точек (белые квадраты), принадлежащих движущейся ППТ. Рис. 5, *a* иллюстрирует результаты, полученные при полной разгрузке, рис. 5, *б* – при частичной разгрузке. В табл. 1, 2 приведены численные значения расчетных точек.

Полученные данные свидетельствуют о достаточно хорошем совпадении теоретических и экспериментальных результатов, что может служить весомым аргументом в пользу сделанного предположения о том, что причина кажущихся противоречий в экспериментах с полной и частичной разгрузкой образцов – проявление не учитываемого при выполнении опытов эффекта релаксации деформационного упрочнения.

**Ключевые слова:** пропорциональное неупругое нагружение, границы текучести, разгрузка, эволюция поверхности текучести.

#### Литература

1. Белл, Д.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 1 / Д.Ф. Белл. – М.: Наука, 1984. – 559 с.
2. Ikegami, K. Experimental plasticity on the anisotropy of metals / K. Ikegami // Colloques internationaux du CNRS. N. 295 – Comportement mecanique des solides anisotropes, Call.115. Boston, London. – 1982. – P. 201–242.
3. Супрун, А.Н. Математическая модель реономной пластичности / А.Н. Супрун // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьков. ун-т, Горький. – 1983. – С. 8–17.
4. Супрун, А.Н. Актуальные проблемы математического моделирования движения поверхности текучести / А.Н. Супрун // Вестник ННГУ. – 2005. – Вып. 1(28). – С. 222–231.

5. *Gupta, N.K.* A study of yield surface upon reversal of loading under biaxial stress / N.K. Gupta, H.A. Laurent // ZAMM. – 1983. – Bd. 663. H.10. – S. 497–504.

6. *Супрун, А.Н.* Математическое моделирование эволюции последовательной поверхности текучести / А.Н. Супрун, Т.М. Вежелис // Информационная среда вуза: Тез. докл. XIII Междунар. науч.-техн. конф. / Ивановский гос. архитектурно-строит. ун-т, Иваново. – 2006. – С. 556–559.

7. *Вежелис, Т.М.* Алгоритм препроцессора автоматизированной системы обработки экспериментальных данных по исследованию границ текучести пластически деформированных металлов / Т.М. Вежелис // Сб. трудов аспирантов и магистрантов. – ННГАСУ, Н.Новгород. – 2007. – С. 176–179.

8. *Супрун, А.Н.* Моделирование эволюции последовательной поверхности текучести металлов при больших деформациях пропорционального нагружения / А.Н. Супрун, Т.М. Вежелис // Информационная среда вуза: Тез. докл. XIV Междунар. науч.-техн. конф. / Ивановский гос. архитектурно-строит. ун-т, Иваново. – 2007. – С. 559–564.

[04.07.2008]

#### A UNIFIED MATHEMATICAL MODEL OF THE EVOLUTION OF A YIELD SURFACE UNDER COMPLETE AND PARTIAL UNLOADING

A.N. Suprun, T.M. Vezhelis

The already available results of experimentally studying yield boundaries in a stress space resulting from proportional inelastic loading are analyzed. It is shown that the substantial qualitative differences in the form and position of the yield surfaces under complete and partial unloading of a specimen cannot be explained in the frame of the time-independent theory of plasticity. The above phenomenon can be accounted for in the rheonomic theory of plasticity as the effect of relaxation of strain hardening the material. It is proposed to describe the evolution of the successive yield surface in a 2-dimensional Ilyushin space in the form of an ellipse subject to changing its parameters (half-axes and coordinates of the center on the surface) in time. To this end, the above parameters are assumed to be hereditarily dependent on the inelastic deformation history. A method for determining the material constants is described. An example of constructing an introduced model is given, showing good comparison with the available results of experimentally determining the yield surface both for complete and partial unloading of the specimen.

**Key words:** proportional inelastic loading, yield boundaries, unloading, evolution of the yield surface.